Uppgift 5.14

Vi skall beräkna arean innanför *astroiden* $\mathbf{r}([0,2\pi[)$ som definieras av

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\cos^3 t \\ \sin^3 t\end{pmatrix}, \qquad \forall t \in [0,2\pi[.$$

Lösning: Den här uppgiften har inget med vektoranalys att göra. I princip skulle vi kunna lösa den med naiva metoder från envariabelanalysen eller flervariabelanalysen. Till exempel skulle vi kunna hitta $y(x)$ och integrera rektangelareor från $x = -1$ till $x = 1$. Det visar sig emellertid bli mycket svårt. Vi skall här i stället använda teorin för vektoranalys för att bestämma arean. Tricket är att utnyttja Greens sats på ett väldigt snitsigt sätt.

Lite teori

Låt γ vara vilken *sluten* (och enkel) kurva som helst. Låt D vara området innanför kurvan. Arean av området D är förstås

$$A(D) = \iint_D dxdy.$$

Betrakta nu *något* av vektorfälten

$$\mathbf{A}(x,y) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0 \\ x\end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-y \\ 0\end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-y/2 \\ x/2\end{pmatrix}.$$

”WTF?! Varför i hela friden skall vi betrakta dessa vektorfält?!” undrar du nu. Anledningen kommer du att upptäcka snart. Jag lovar.

Låt oss nu betrakta kurvintegralen av $\mathbf{A}$ längs kurvan γ, d.v.s. det arbete som kraftfältet $\mathbf{A}$ utför på en partikel som går ett varv längs γ i positiv riktning (d.v.s. området D ligger alltid till vänster). ”WTF?! Vi skall ju beräkna *areor*, inte *arbeten*!” tänker du kanske nu. Jo, men ge dig till tåls. Du kommer snart att se varför vi gör som vi gör.

Eftersom kurvan γ är sluten, kan vi använda Greens sats. Vi får att arbetet är

$$W = \int_\gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Oavsett vilket av de tre vektorfälten ovan vi väljer, så blir

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

d.v.s.

$$W = \iint_D dxdy = A(D),$$

d.v.s. arbetet är lika med arean av området innanför den slutna kurvan! Vi har alltså funnit ett helt nytt sätt att beräkna areor av områden: vi bestämmer helt enkelt kurvintegralen av något av vektorfälten ovan längs områdets rand! Det här är inte alls intuitivt, men det är väldigt smart.

Back to Business

Låt oss då återgå till uppgift 5.14. Vi skall försöka att bestämma arean innanför astroiden (området D) genom att integrera vektorfältet

$$\mathbf{A}(x,y) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -y/2 \\ x/2 \end{pmatrix}$$

längs astroiden (kurvan) $\gamma = \mathbf{r}([0,2\pi[)$ där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}, \qquad \forall t \in [0,2\pi[.$$

Detta är enkelt. Vi får

$$\begin{aligned}
A(D) = W &= \int_\gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{A}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot \mathbf{r}'(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sin^3 t \\ \cos^3 t \end{pmatrix}\cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3\cos^2 t\sin t \\ 3\sin^2 t\cos t \end{pmatrix} dt = \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^4 t\cos^2 t + \cos^4 t\sin^2 t)dt = \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^4 t\,(1-\sin^2 t) + (1-\sin^2 t)^2\sin^2 t)dt = \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^4 t - \sin^6 t + \sin^2 t - 2\sin^4 t + \sin^6 t)dt = \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \sin^4 t)dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,(1-\sin^2 t)dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} (\sin t\cos t)^2 dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}2\sin t\cos t\right)^2 dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt = \\
&= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = \frac{3}{8}\cdot\pi = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$