Uppgift 5.15

Låt γ vara en kurva i halvplanet $y \geq 0$ från punkten $(1,0)$ till $(-1,0)$. Längs vilken sådan kurva är kurvintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x,y) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y^3 - 6y \\ 6x - x^3 \end{pmatrix}$$

störst?

Lösning: Först noterar vi att vektorfältet längs hela x-axeln ($y = 0$) saknar x-komponent; det pekar alltså rakt uppåt/nedåt (d.v.s. vertikalt). Följaktligen, om vi integrerar längs x-axeln, där $d\mathbf{r}$ alltid är horisontell, blir integralen noll (”kraft vinkelrät mot sträcka”). [Mer formellt kan detta visas på följande sätt: Säg att vi integrerar längs kurvan $C = \mathbf{r}([a,b])$ där

$$\mathbf{r}(t) \coloneqq (t,0), \qquad \forall t \in [a,b].$$

Då blir kurvintegralen (”arbetet”)

$$W = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 6t - t^3 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_a^b 0 dt = 0.]$$

Låt nu γ vara någon kurva från $(1,0)$ till $(-1,0)$ i halvplanet $y \geq 0$. Vi kan skapa en *sluten* kurva Γ genom att lägga till den räta linjen L från $(-1,0)$ tillbaka till $(1,0)$. Om vi betecknar innandömet med Ω, så att $\partial\Omega = \Gamma$, ger Greens sats

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 3 \iint_\Omega (4 - x^2 - y^2) dxdy.$$

Vi noterar också att

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

eftersom L är en del av x-axeln. Sålunda

$$\int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 3 \iint_\Omega (4 - x^2 - y^2) dxdy.$$

Vi vill välja γ så att integralen blir så stor som möjligt. Notera att integranden $4 - x^2 - y^2$ är positiv i det inre till halvdisken $x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$ och negativ utanför halvdisken (men fortfarande i halvplanet $y \geq 0$). För att få så stort värde på dubbelintegralen som möjligt bör vi därför ta med alla positiva bidrag, och inga negativa bidrag, d.v.s. vi bör ta med allt innanför nämnda halvcirkel, men inget utanför. Vår kurva γ blir då följande:

1. Den räta linjen från startpunkten $(1,0)$ till $(2,0)$.
2. Halvcirkeln från $(2,0)$ till $(-2,0)$.
3. Den räta linjen från $(-2,0)$ till slutpunkten $(-1,0)$.

Rita en bild! Med detta val av γ blir den slutna kurvan $\gamma + L$ randen till området $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$, och det är klart att detta område är det område i övre halvplanet för vilket dubbelintegralen ovan, och därmed den sökta kurvintegralen, blir så stor som möjligt.

Integralens värde erhålles enkelt genom byte till polära koordinater i dubbelintegralen:

$$3 \iint_\Omega (4 - x^2 - y^2)dxdy = 3 \iint_E (4 - r^2)rdrd\varphi = 3 \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 (4r - r^3)dr = 12\pi.$$