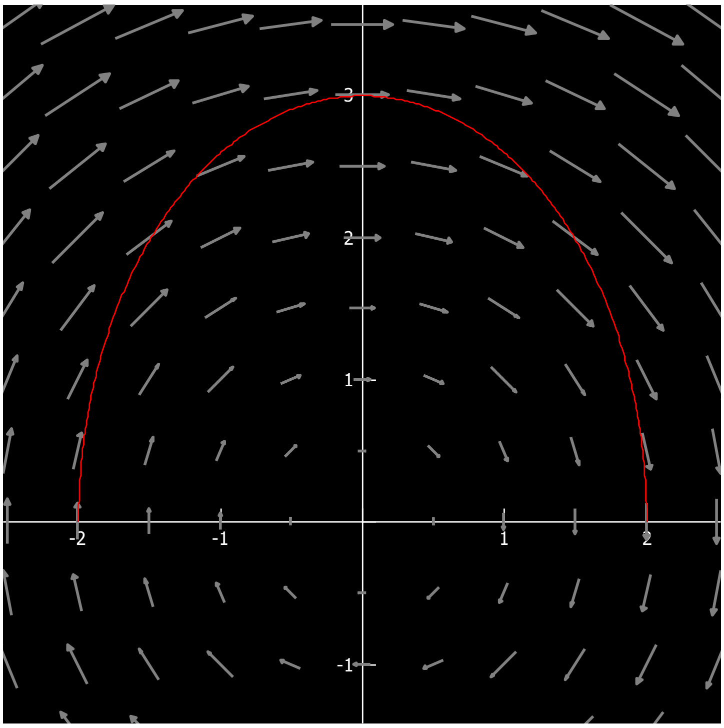
Uppgift 5.4

Beräkna $\int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är kurvan $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, y \geq 0$ vilken genomlöps från $x = 2$ till $x = -2$ och vektorfältet $\mathbf{A}(x, y) = (y, -x)$.

Lösning: Eftersom

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

är kurvan den övre halvan (ty $y \geq 0$) av den koordinataxelparallella ellipsen som sträcker sig från -2 till $+2$ i x-led och från -3 till 3 i y-led:



Den här kurvan är bilden $\mathbf{r}([0, \pi])$ under parametriseringsfunktionen[1]

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}, \qquad \forall t \in [0, \pi].$$

Alltså är den sökta kurvintegralens värde

$$\int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^\pi \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3\sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2\sin t \\ 3\cos t \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^\pi (-6\sin^2 t - 6\cos^2 t) dt = -6\int_0^\pi dt = -6\pi.$$

[1] Detta är ju standardsättet att parametrisera en ellips. Hade vi velat ha hela ellipsen hade vi låtit t gå från 0 till 2π. Om vi bara låter t gå upp till π får vi övre halvan av ellipsen. Notera också att t går *från* 0 *till* π, så att kurvan verkligen genomlöps i rätt riktning, d.v.s. från (2,0) till $(-2, 0)$.