Uppgift 5.6

En partikel flyttas längs den räta linjen från $(3,1)$ till $(1,2)$ under verkan av en kraft som är riktad mot origo och vars belopp är lika med avståndet till origo. Bestäm arbetet som kraftfältet utför på partikeln.

Lösning: Låt oss först bestämma ett uttryck för kraftfältet $\mathbf{F}$. I punkten (x, y) är kraften $\mathbf{F}(x, y)$ riktad rakt mot origo, och har beloppet $|(x, y)|$. Kraften i (x, y) är alltså den *motsatta* ortsvektorn i samma punkt, d.v.s.

$$\mathbf{F}(x, y) = -(x, y).$$

Låt oss nu parameterisera kurvan γ, den räta linjen från $(3,1)$ till $(1,2)$. Vi ser att $\gamma = \mathbf{r}([0,2])$ där

$$\mathbf{r}(t) \coloneqq \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3-t \\ 1+\frac{1}{2}t \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \forall t \in [0,2].$$

Vi kan då beräkna det sökta arbetet:

$$W = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^2 \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3+t \\ -1-\frac{1}{2}t \end{pmatrix}\cdot\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}dt = \int_0^2 \left(3 - t - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t\right)dt =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{4}t\right)dt = \frac{5}{2}.$$