Uppgift 5.7

Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x,y) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} e^{x-y} \\ e^{x+y} \end{pmatrix}$$

och låt γ vara randkurvan till kvadraten med hörn i $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ och $(0,-1)$, tagen ett varv moturs. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$.

Lösning: Vi kan naturligtvis lösa problemet på naivt sätt, genom att parameterisera en sida i kvadraten i taget. Det är lätt. Men vi kan också använda Greens sats. Låt oss pröva det. Med $\mathbf{A}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ har vi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} - (-e^{x-y}) = e^{x+y} + e^{x-y}.$$

Enligt Greens sats är kurvintegralen

$$W = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

där D är det tvådimensionella området innanför den slutna kurvan γ, d.v.s. det område som har γ som randkurva: $\partial D = \gamma$. Vi integrerar över de två delarna

$$\begin{aligned} D_- &= \{(x,y) \in D : x < 0\} \quad \text{och} \\ D_+ &= \{(x,y) \in D : x \geq 0\} \end{aligned}$$

var för sig (varför?); notera att $D = D_- \cup D_+$ och $D_- \cap D_+ = \emptyset$. I det första området får vi

$$\iint_{D_-} (e^{x+y} + e^{x-y}) dxdy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-1-x}^{1+x} (e^{x+y} + e^{x-y}) dy \right) dx = e - \frac{3}{e}.$$

I det andra området får

$$\iint_{D_+} (e^{x+y} + e^{x-y}) dxdy = \int_{0}^{1} \left(\int_{x-1}^{1-x} (e^{x+y} + e^{x-y}) dy \right) dx = e + \frac{1}{e}.$$

Sålunda är

$$\begin{aligned} W = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_{D_-} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \iint_{D_+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \\ = \left(e - \frac{3}{e}\right) + \left(e + \frac{1}{e}\right) = 2e - \frac{2}{e} = 2(e - e^{-1}). \end{aligned}$$