Uppgift 5.9

Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x,y) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3x^2 + 4y \\ y^4 + 3y^2 + x \end{pmatrix}.$$

Låt kurvan γ vara halvcirkeln från $(1,0)$ till $(-1,0)$ i övre halvplanet $y \geq 0$.

Deluppgift A

Vi skall beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, d.v.s. det arbete som kraftfältet $\mathbf{A}$ utför på en partikel när den rör sig från punkten $(1,0)$ till punkten $(-1,0)$ längs kurvan γ. I A-uppgiften löser vi uppgiften på naivt sätt, d.v.s. på det vanliga sättet, genom att helt enkelt summera (integrera) ihop "kraft gånger sträcka" längs kurvan.

Vi behöver då parameterisera kurvan γ. Det är enkelt, ty det är klart att $\gamma = \mathbf{r}([0,\pi])$ där

$$\mathbf{r}(t) \coloneqq \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,\pi].$$

Arbetet är därmed

$$W = \int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^\pi \left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3\cos^2 t + 4\sin t \\ \sin^4 t + 3\sin^2 t + \cos t \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right) dt =$$
$$= \int_0^\pi (-3\cos^2 t \sin t - 4\sin^2 t + \sin^4 t \cos t + 3\sin^2 t \cos t + \cos^2 t) dt.$$

Låt oss betrakta varje term för sig:

$$\int_0^\pi -3\cos^2 t \sin t \, dt = \begin{bmatrix} s = \cos t \\ ds = -\sin t \, dt \end{bmatrix} = \int_1^{-1} 3s^2 ds = [s^3]_1^{-1} = -2,$$
$$\int_0^\pi -4\sin^2 t \, dt = -2\pi \quad \text{(använd t.ex. cos för dubbla vinkeln)},$$
$$\int_0^\pi \sin^4 t \cos t \, dt = 0 \quad \text{(av symmetriskäl)},$$
$$\int_0^\pi 3\sin^2 t \cos t \, dt = 0 \quad \text{(av symmetriskäl)} \quad \text{och}$$
$$\int_0^\pi \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{(använd t.ex. cos för dubbla vinkeln)}.$$

Sålunda är

$$W = -2 - \frac{3}{2}\pi.$$

Deluppgift B

Vi skall nu beräkna kurvintegralen (arbetet) på ett helt annat sätt, nämligen genom att utnyttja Greens formel. Greens formel gäller ju kurvintegraler över *slutna* kurvor, men vår kurva γ är inte sluten. Idén är då att "sluta till" γ genom att lägga till den räta linjen från $(-1,0)$ till $(1,0)$; om vi kallar den linjen för L så är vår nya slutna kurva $\gamma + L$ (eller, om man tänker på kurvor som punktmängder, $\gamma \cup L$). Greens sats gäller för $\gamma + L$ och ger

$$\int_{\gamma+L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

där D är området innanför den slutna kurvan $\gamma + L$ och P och Q bara är namn på komponenterna hos vektorfältet, d.v.s. $\mathbf{F}(x, y) = (P, Q) = (3x^2 + 4y, y^4 + 3y^2 + x)$. Vi får

$$\int_{\gamma+L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (1-4) dxdy = -3 \iint_D dxdy = -\frac{3\pi}{2}$$

eftersom $\iint_D dxdy = \pi/2$ är arean av halvdisken D (en halv disk med radie 1).

Nu har vi alltså räknat ut $\int_{\gamma+L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, men vi söker $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Det är emellertid självklart att

$$\int_{\gamma+L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där den senare kurvintegralen är mycket enkel att ta fram, eftersom kurvan L är en rät linje som kan parameteriseras $\mathbf{r}(t) = (t, 0)$ där t går från -1 till 1. Sålunda är

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{-1}^{1} \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) dt = \int_{-1}^{1} 3t^2 dt = [t^3]_{-1}^{1} = 2.$$

Därför har vi funnit

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma+L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{3\pi}{2} - 2$$

än en gång. Noter att Greens sats underlättar lösningen av det här problemet.