Uppgift 6.22

Betrakta ytan

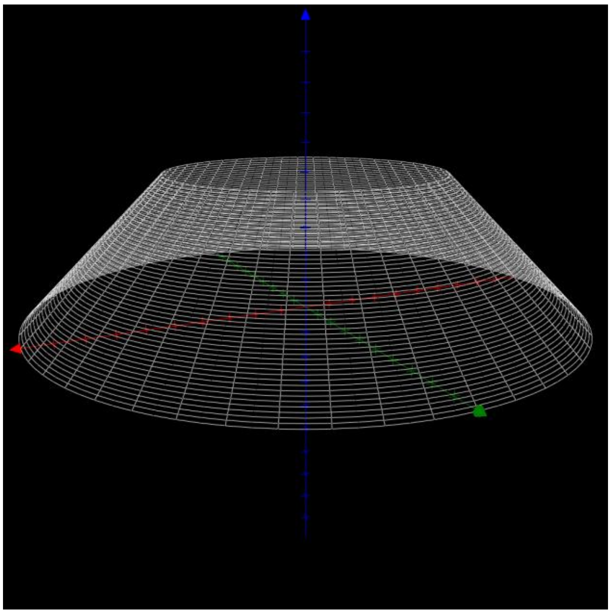
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \quad z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \le z \le \frac{1}{2}\right\}$$

samt vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beräkna flödet av $\mathbf{A}$ genom S i riktningen $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} > 0$.

Lösning: S är den del av enkelkonen $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ som sträcker sig mellan 0 och $\frac{1}{2}$ i z-led. Det är alltså en ”lampskärm” med nedre radie 1 och övre radie $\frac{1}{2}$:



Vi måste parametrisera ytan. Eftersom ytan är en *graf* (nämligen till det plana skalärfältet $(x, y) \mapsto 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$) kan vi använda x och y som parametrar. Vi får då att ytan $S = \mathbf{r}(D)$ där parametriseringsfunktionen

$$\mathbf{r}(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 - \sqrt{u^2 + v^2} \end{pmatrix}$$

och parameterområdet $D \coloneqq \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2: \quad \frac{1}{2} \le \sqrt{u^2 + v^2} \le 1\right\}$ är en annulus i uv-planet. Parameterkurvornas hastighetsvektorer är

$$\mathbf{r}'_u(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}'_v(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{pmatrix}$$

så att

$$\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v) = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{u^2+v^2} \end{pmatrix}.$$

Notera att den här normalen pekar uppåt (d.v.s. har en positiv z-komponent), så vi kommer att få flödet i den önskade riktningen. Det sökta flödet är

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iint_D \mathbf{A}\big(\mathbf{r}(u,v)\big) \cdot \big(\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)\big) du dv = \\
&= \iint_D \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{u^2+v^2} \end{pmatrix} du dv = \\
&= \iint_D \frac{1}{u^2+v^2} (u^2+v) du dv = \iint_D \frac{u^2+v}{u^2+v^2} du dv = \\
&= \left[\begin{array}{c} u = \rho \cos\varphi \\ v = \rho \sin\varphi \\ J = \rho \\ (\rho,\varphi) \in E := \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0, 2\pi[\end{array} \right] = \iint_E \frac{\rho^2 \cos^2\varphi + \rho \sin\varphi}{\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \\
&= \iint_E (\rho \cos^2\varphi + \sin\varphi) d\rho d\varphi = [\text{symmetriskäl}] = \iint_E (\rho \cos^2\varphi) d\rho d\varphi = \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{3}{8} \cdot \pi = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Svar: Det sökta flödet är $\frac{3\pi}{8}$.