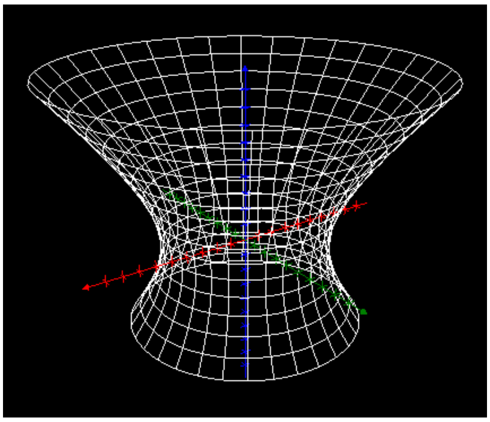
Uppgift 6.24 (nästan)



Beräkna flödet av

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

"ut" genom (d.v.s. i riktning från z-axeln) den enmantlade hyperboloiden

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon \quad x^2+y^2-z^2=1, \qquad z \in [-1,2]\}.$$

Lösning: Vi har

$$S = \mathbf{r}(D)$$

där

$$\mathbf{r}(u,v) \coloneqq \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \sqrt{u^2+1}\cos v \\ \sqrt{u^2+1}\sin v \\ u \end{pmatrix}$$

och $D \coloneqq [-1,2] \times [0,2\pi[$. Detta ger

$$\mathbf{r}'_u(u,v) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \dfrac{u\cos v}{\sqrt{u^2+1}} \\ \dfrac{u\sin v}{\sqrt{u^2+1}} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}'_v(u,v) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sqrt{u^2+1}\sin v \\ \sqrt{u^2+1}\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

så att

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sqrt{u^2+1}\cos v \\ -\sqrt{u^2+1}\sin v \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Därför är det sökta flödet (notera bytet av normalens riktning!)

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \iint_D \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot(-\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)\,dudv = \\
&= \iint_D \frac{1}{u^2+1}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \sqrt{u^2+1}\cos v \\ \sqrt{u^2+1}\sin v \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \sqrt{u^2+1}\cos v \\ \sqrt{u^2+1}\sin v \\ \dots \end{pmatrix} dudv = \\
&= \iint_D \frac{1}{u^2+1}(u^2+1)\,dudv = \iint_D dudv = A(D) = L([-1,2])\cdot L([0,2\pi[) = \\
&= 3\cdot 2\pi = 6\pi.
\end{aligned}$$