Uppgift 6.26

Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A} = \left(\frac{-6x}{x^2+y^2}, \frac{-6y}{x^2+y^2}, z+1\right)$$

och ytan

$$S = \left\{ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3: \quad x^2 + 4y^2 = 4, \quad z \in [0,1] \right\}.$$

S kan skrivas

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

och är alltså en rät elliptisk cylinder med halvaxellängder 2 respektive 1 med z-axeln som symmetriaxel, längs vilken cylindern sträcker sig från 0 till 1.

Vi skall beräkna flödet $\mathbf{A}$ ”ut ur” cylindern S, d.v.s. i riktning *från* z-axeln. Vi tänker använda oss av Gauss sats, och finner divergensen

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-6x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-6y}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(z+1) = 1.$$

Vi inför den cirkulära cylindern

$$S' = \left\{ \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z \in [0,1] \right\}$$

och betraktar det område $K \subset \mathbb{R}^3$ som begränsas av S, S' och planen $z = 0$ samt $z = 1$. Randen $\partial K = S \cup S' \cup S'' \cup S'''$ där S'' och S''' är ”taket” respektive ”golvet” av området. Enligt Gauss sats är

$$\iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{A}) dxdydz = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S''} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S'''} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{1}$$

där (volymen av en rät elliptisk cylinder med halvaxellängder a och b och höjd h är $V = abh\pi$)

$$\iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{A}) dxdydz = \iiint_K dxdydz = V(D) = 2\pi - \pi = \pi$$

och (notera att normalen nu pekar *mot* z-axeln eftersom detta är riktningen *ut ur* kroppen K)

$$\iint_{S'} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \left[\mathbf{r}(\varphi,z) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ z\end{pmatrix}, \qquad (\varphi,z)\in D \coloneqq [0,2\pi[\times[0,1]\right] =$$

$$= \iint_D \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-6\cos\varphi\\ -6\sin\varphi\\ z+1\end{pmatrix}\cdot\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\ -\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} d\varphi dz = \iint_D (6\cos^2\varphi + 6\sin^2\varphi)d\varphi dz =$$

$$= 6\iint_D d\varphi dz = 6\cdot 2\pi\cdot 1 = 12\pi.$$

Taket S'' och golvet S''' har båda arean $A \coloneqq A(S'') = A(S''') = 2\pi - \pi = \pi$. Vi kan parametrisera dessa som $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,1)$ respektive $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,0)$ där $(x,y)\in D$ är projektionen av kroppen K på xy-planet, som alltså har arean $A = \pi$. Därför är

$$\iint_{S''} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\dfrac{-6x}{x^2+y^2}\\ \dfrac{-6y}{x^2+y^2}\\ z+1\end{pmatrix}\cdot\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dxdy = \iint_D (z+1)dxdy = 2\iint_D dxdy = 2\pi$$

medan

$$\iint_{S'''} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\dfrac{-6x}{x^2+y^2}\\ \dfrac{-6y}{x^2+y^2}\\ z+1\end{pmatrix}\cdot\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} dxdy = \iint_D -(z+1)dxdy = -\iint_D dxdy = -\pi.$$

Med allt insatt lyder formeln (1)

$$\pi = \iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + 12\pi + 2\pi + (-\pi)$$

varför

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = -12\pi.$$