Uppgift 7.11

Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} yz + y - z \\ xz + 5x \\ xy + 2y \end{pmatrix}$$

och låt

$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 1\}$$

vara skärningskurvan mellan enhetssfären och planet $x + y = 1$. Vi skall beräkna kurvintegralen $W = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är orienterad så att dess positiva riktning i punkten $(1,0,0)$ är $(0,0,1)$.

Lösning:

Kurvan γ är snittet mellan en sfär och ett plan, d.v.s.[1] en cirkel. Försök att rita situationen, i synnerhet planet $x + y = 1$. Lokalisera punkten $(1,0,0)$ som uppenbarligen ligger på kurvan, d.v.s. $(1,0,0) \in \gamma$. Kurvans positiva riktning här skall vara $(0,0,1)$, d.v.s. rakt upp, som uppenbarligen är en av de två möjliga enhetstangenterna till kurvan i denna punkt. Detta innebär att kurvan är orienterad *medurs* sett från, t.ex., $(10, 10, 0)$. Det vi skall göra är alltså att beräkna arbetet som kraftfältet $\mathbf{F}$ utför på en partikel när den rör sig ett varv medurs (sett från $(10, 10, 0)$) längs cirkeln γ.

Det är naturligtvis fullt möjligt att lösa problemet på naivt sätt, genom att parameterisera γ och helt enkelt summera ihop ”kraft gånger sträcka” längs kurvan, d.v.s. beräkna $W = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ på vanligt sätt. Men vi väljer här i stället att använda Stokes sats, som säger att detta tal (arbetet) är samma som (plus eller minus) flödet av $\nabla \times \mathbf{F}$ genom *någon* yta som har γ som randkurva.

Anledningen till detta val är att rotationen i vårt fall är väldigt sympatisk, nämligen

$$\nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

som ju är ett *konstant* vektorfält. Vi måste nu välja någon yta S som har γ som randkurva, d.v.s. $\partial S = \gamma$. Det finns förstås oändligt många sådana ytor, t.ex. en av skärvorna av enhetssfären eller delen av planet innanför γ. Vi väljer så klart delen av planet innanför γ. Detta är, uppenbarligen, en cirkulär *disk*. Låt oss kalla den $S = D$, d.v.s.

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Flödet genom disken är sålunda

$$\phi = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint_D \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dA$$

[1] Snittet mellan en sfär och ett plan kan också vara (mängden av) en enda punkt och den tomma mängden, men i det här fallet föreligger uppenbarligen inte något av dessa ”urartade” fall.

eftersom planets enhetsnormal är

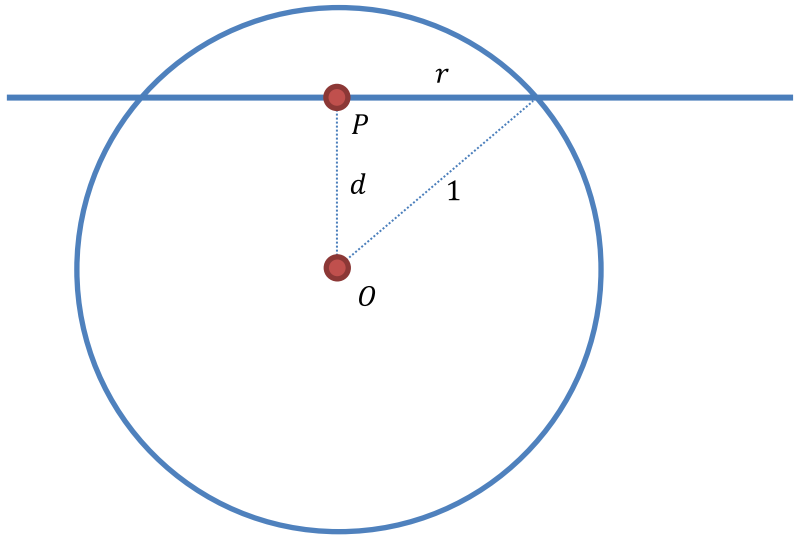
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(Notera att detta val av normal också väljer åt vilket håll vi beräknar flödet: från ena sidan till andra eller tvärtom. Tydligen beräknar vi flödet i riktning *från* origo.) Vi får

$$\phi = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint_D \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} dA = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_D dA = \frac{1}{\sqrt{2}}A(D)$$

där $A(D)$ är arean av disken D, som vi enkelt kan finna.[2] Du får bestämma arean av cirkeldisken på vilket sätt du vill (så länge du gör rätt) – i själva verket är det ett ganska enkelt gymnasieproblem. Ett sätt är som följer.

Vi skär enhetssfären med ett plan. Betrakta xy-planet, d.v.s. planet $z = 0$. Situationen är alltså som nedan. Det vi söker är raden r hos disken D, för om vi bara hittar r så är ju $A(D) = r^2\pi$.



Låt punkten P vara skärningspunkten mellan planet $x + y = 1$ och en stråle från origo O som skär planet under rät vinkel, allt i planet $z = 0$. Det är klart att

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

eftersom $x = y$ (titta på din ursprungliga bild över situationen eller inse att planet $x + y = 1$ har normalen $(1,1)$), $x + y = 1$ (planets ekvation) och $z = 0$ (vi tittar nu bara på xy-planet). Sålunda är avståndet från origo till P lika med

[2] Notera att detta är ett exempel på uppgift när det faktiskt är bättre att ”hoppa in” direkt i definitionen av flödesintegral som en integral över ytan D, d.v.s. i $\iint_D \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$, än att först parameterisera ytan, d.v.s. skriva den som $D = \mathbf{r}(E)$, och hoppa in i $\iint_E \mathbf{A}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) dudv$ som är motsvarande integral över parameterområdet E. Inte nog med att vi *slipper* parameterisera ytan: det blir också lättare!

$$d = |P| = \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Eftersom cirkeln i bilden $(x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0)$ har radie 1, måste

$$d^2 + r^2 = 1$$

och därmed är den sökta radien

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vår disk har alltså arean

$$A(D) = r^2\pi = \frac{\pi}{2}$$

och flödet genom disken är

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} A(D) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Vi använder nu Stokes sats för att relatera arbetet W till flödet ϕ. Kom ihåg att W är arbetet som $\mathbf{F}$ utför på en partikel när den rör sig ett varv runt γ, och ϕ är flödet av $\nabla \times \mathbf{F}$ genom en yta i rummet som har γ som randkurva. Alltså är

$$W = \pm\phi.$$

Frågan är vilket tecken som gäller. Kom ihåg att vi när vi beräknar arbetet längs γ går ett varv *medurs* sett från $(10, 10, 0)$, och med valet av normal $\hat{\mathbf{n}}$ till disken D ovan beräknar vi flödet *från* origo. Det är klart att när vi går ett varv *medurs* kring γ med huvudet riktat *från* origo så har vi disken D till *höger* om oss. Höger är ”fel” håll, så vi får minustecknet. Alltså[3]

$$W = -\phi = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

[3] Notera att $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{2\cdot 2} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ så vi får samma svar som facit.