# Uppgift 8.2

Vi betraktar vektorfältet

$$\mathbf{A}(x,y) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \dfrac{axy}{1+x^2y} \\ \dfrac{x^2}{1+x^2y} \end{pmatrix}$$

som beror på konstanten $a \in \mathbb{R}$. Vi vill först bestämma $a$ så att fältet blir ett potentialfält (åtminstone i positiva kvadranten, vilket är vad vi kommer att vara intresserade av – notera att fältet är definierat överallt här, eftersom nämnaren är nollskild). *Om* $\mathbf{A} = (P, Q)$ är ett potentialfält, *så* är

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$$

detta är således ett *nödvändigt* villkor för att $\mathbf{A}$ skall vara ett potentialfält. I vårt fall får vi

$$\frac{2x}{(1+x^2y)^2} = \frac{ax}{(1+x^2y)^2}$$

vilket ger $a = 2$. Så *om* $\mathbf{A}$ är ett potentialfält, *så* måste $a = 2$. Och eftersom positiva kvadranten är **enkelt sammanhängande** följer det att $\mathbf{A}$ i sådana fall också *är* ett potentialfält åtminstone där.

Från och med nu antar vi att $a = 2$ så att vi betraktar vektorfältet

$$\mathbf{A}(x,y) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \dfrac{2xy}{1+x^2y} \\ \dfrac{x^2}{1+x^2y} \end{pmatrix}$$

som alltså är ett potentialfält åtminstone i positiva kvadranten.

## En potential

Vi kan bestämma en potential till $\mathbf{A}$, d.v.s. ett skalärfält $\phi$ sådant att $\mathbf{A} = \nabla\phi$. Detta vet vi är möjligt *åtminstone* i den positiva kvadranten. Mer explicit har vi

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \left(\frac{2xy}{1+x^2y}, \frac{x^2}{1+x^2y}\right) \tag{1}$$

där första komponenten[1]

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{2xy}{1+x^2y} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(x,y) = \ln(1+x^2y) + f(y)$$

för någon funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi behöver bara *en* potential, d.v.s. *en* lösning till systemet (1), så vi kan tillåta oss att ”slarva” lite och pröva $f(t) \equiv 0$. Vi inser direkt, genom prövning, att

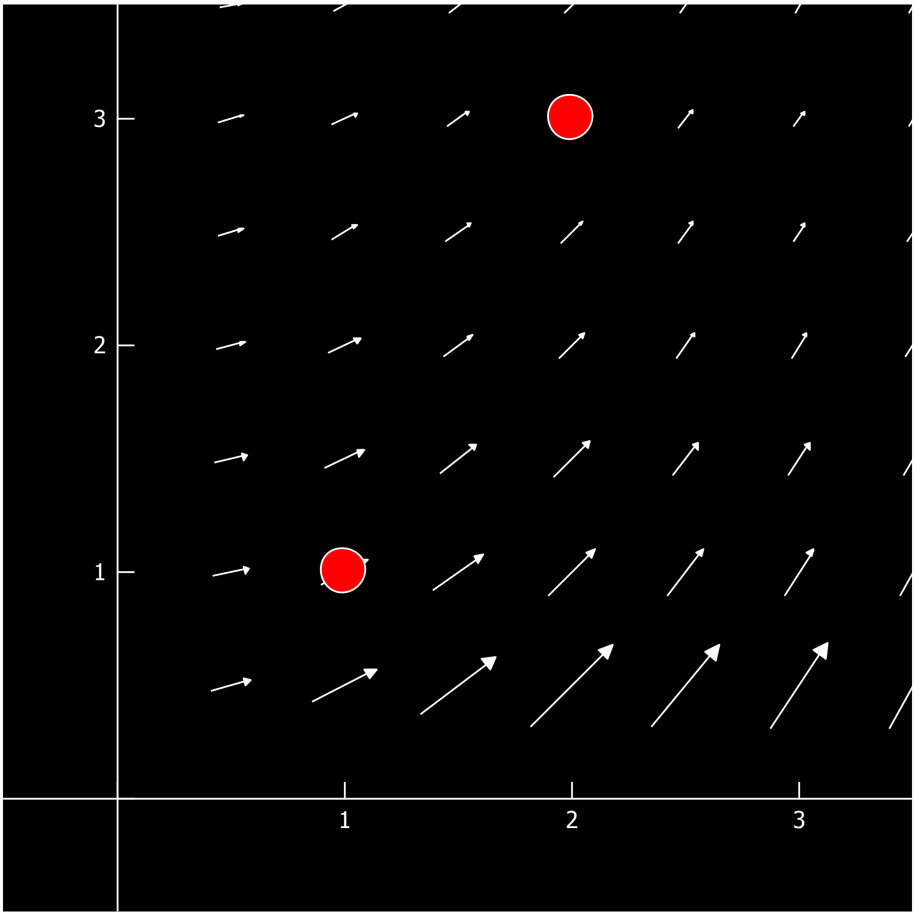
[1] Vi väljer $\ln(1+x^2y)$ framför $\ln(-1-x^2y)$ eftersom vi vill ha en potential i positiva kvadranten. I allmänhet får vi förstås $\ln|1+x^2y|$ som reduceras till $\ln(1+x^2y)$ i positiva kvadranten.

$$\phi(x,y) = \ln(1 + x^2 y)$$

uppfyller båda ekvationerna i systemet (1). Detta är alltså en potential till $\mathbf{A}$, så $\mathbf{A}$ är ett potentialfält i hela den valda potentialens definitionsmängd (och inte bara i positiva kvadranten).

## En kurvintegral

Nedan visas vektorfältet $\mathbf{A}$ tillsammans med de två punkterna $\mathbf{a} = (1,1)$ och $\mathbf{b} = (2,3)$:

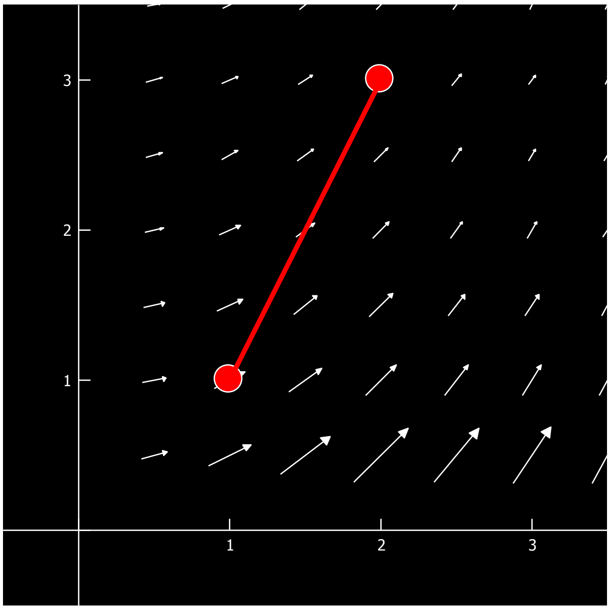



Vi betraktar en partikel som rör sig från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$, och undrar speciellt vilket arbete kraftfältet utför på partikeln. I allmänhet beror ett arbete naturligtvis på *vilken väg* man går mellan ”start” och ”mål”, men eftersom $\mathbf{A}$ är ett potentialfält så får vi faktiskt samma arbete *oberoende* av vilken väg vi väljer (inom potentialens definitionsområde, förstås). Faktiskt är ju arbetet endast lika med skillnaden i potential mellan punkterna, d.v.s. arbetet är

$$W \coloneqq \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = \ln 13 - \ln 2 = \ln\frac{13}{2}$$

oberoende av vägen (inom potentialens definitionsområde).

För skojs skull kan vi också pröva att beräkna arbetet ”manuellt” i ett konkret fall, d.v.s. längs *någon* kurva som förbinder $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. För att få lätta räkningar kan vi välja den räta linjen $L$ som går mellan punkterna:




Vi måste förstås parametrisera $L$, och vi ser direkt att $L = \mathbf{r}([0,1])$ där[2] parametriseringsfunktionen

$$\mathbf{r}(t) \coloneqq \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1+t\\1+2t\end{pmatrix}.$$

Arbetet som kraftfältet $\mathbf{A}$ utför på en partikel när den färdas från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$ längs $L$ är sålunda

$$W = \int_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{A}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot\mathbf{r}'(t)dt = \int_0^1 \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\dfrac{2(1+t)(1+2t)}{1+(1+t)^2(1+2t)}\\ \dfrac{(1+t)^2}{1+(1+t)^2(1+2t)}\end{pmatrix}\cdot\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}dt$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{2(1+t)(1+2t)}{1+(1+t)^2(1+2t)} + \frac{2(1+t)^2}{1+(1+t)^2(1+2t)}\right)dt$$
$$= \int_0^1 \frac{6t^2+10t+4}{2t^3+5t^2+4t+2}dt = [\ln(2t^3+5t^2+4t+2)]_0^1 = \ln 13 - \ln 2 = \ln\frac{13}{2}$$

som väntat!

Att $W > 0$ kan man för övrigt se direkt av plotten av vektorfältet $\mathbf{A}$ utan att räkna något alls – hur?

[2] Med symbolen "$\mathbf{r}([0,1])$" menas *mängden* av alla punkter (i planet) man får ut ur $\mathbf{r}$ när man stoppar in alla punkter i $[0,1]$. Vi säger att $L = \mathbf{r}([0,1])$ är *bilden* av intervallet $[0,1]$ under parametriseringsfunktionen $\mathbf{r}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$.