Uppgift 8.6

Vektorfältet

$$\mathbf{F} = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = e^{x^2+4y^2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1+2x^2+2xy \\ 1+8xy+8y^2 \end{pmatrix}$$

är ett potentialfält eftersom $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ på hela $\mathbb{R}^2$. Vi skall beräkna kurvintegralen längs någon kurva som börjar i punkten $(2,0)$ och slutar i punkten $(0,1)$; eftersom $\mathbf{F}$ är ett potentialfält spelar den precisa vägen ingen roll. Vi kan t.ex. integrera längs ellipsbiten $\gamma = \mathbf{r}(I)$ där

$$\mathbf{r}(t) \coloneqq (2\cos t, \sin t), \qquad t \in I \coloneqq \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ekvationen för denna ellips är ju $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1$, eller $x^2 + 4y^2 = 4$ vilket är osedvanligt sympatiskt. Vi får då

$$\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) = e^4 \cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1+8\cos^2 t + 4\cos t \sin t \\ 1+16\cos t\sin t + 8\sin^2 t \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{r}'(t) = (-2\sin t, \cos t).$$

Alltså är

$$W \coloneqq \int_\gamma \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^4 \cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1+8\cos^2 t + 4\cos t \sin t \\ 1+16\cos t\sin t + 8\sin^2 t \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt =$$

$$= e^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin t - 16\sin t\cos^2 t - 8\sin^2 t\cos t + \cos t + 16\sin t\cos^2 t +$$

$$+ 8\sin^2 t\cos t)dt = e^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin t + \cos t)dt = e^4 \cdot (-1) = -e^4.$$

Problem solved.