Uppgift 9.18

Vi skall beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A}(\rho,\varphi,z) = z\frac{\rho^2-1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$ ut ur klotet $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4\}$.

Lösning: Notera först att klotet beskrivs av olikheten $\rho^2 + (z-2)^2 \leq 4$ i cylindriska koordinater; vi kommer använda det flera gånger nedan.

Vår idé är att använda Gauss sats, men vi kan inte applicera den direkt, eftersom vektorfältet beter sig illa längs z-axeln (där $\rho = 0$). Vi inför därför cylindern

$$\rho = \epsilon$$

för något (litet) $\epsilon > 0$. Om vi ”borrar ur” den fyllda cylindern $\rho < \epsilon$ ur klotet erhåller vi kroppen

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \rho^2 + (z-2)^2 \leq 4 \quad \text{och} \quad \rho \geq \epsilon\}.$$

Divergensen av vektorfältet $\mathbf{A}$ är

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(z\frac{(\rho^2-1)}{\rho}\cdot\rho\right)\right] = 2z$$

varför Gauss sats ger att flödet ut ur kroppen K (klotet D minus borrhålet) är

$$\phi_{\text{tot}} = \iiint_K (\nabla\cdot\mathbf{A})dV = \iiint_K 2z\,\rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}}\int_{\epsilon}^{\sqrt{4-(z-2)^2}} 2z\rho d\rho\,dz\,d\varphi.$$

Det är lätt hänt att få för sig att $z_{\min} = 0$ och $z_{\max} = 4$, men så är inte fallet, eftersom vi borrat bort en fylld cylinder från klotet, och med sig tog den ett område kring varje pol hos klotet (rita en bild!). Ur en bild av situationen framgår att $z_{\min}$ och $z_{\max}$ är lösningarna till $\rho^2 + (z-2)^2 = 4$ när $\rho = \epsilon$, som ger

$$z_{\min} = 2 - \sqrt{4-\epsilon^2}, \qquad z_{\max} = 2 + \sqrt{4-\epsilon^2}.$$

[Den övre gränsen för ρ i integralen ovan är förstås lösningen till $\rho^2 + (z-2)^2 = 4$.] Vi erhåller sålunda

$$\begin{aligned}
\phi_{\text{tot}} = \iiint_K (\nabla\cdot\mathbf{A})dV &= \int_0^{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}}\int_{\epsilon}^{\sqrt{4-(z-2)^2}} 2z\rho d\rho\,dz\,d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} z\int_{\epsilon}^{\sqrt{4-(z-2)^2}} 2\rho d\rho\,dz\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} z[\rho^2]_{\rho=\epsilon}^{\sqrt{4-(z-2)^2}}dz\,d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} z(4-(z-2)^2-\epsilon^2)dz\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}}(4z^2-z^3-\epsilon^2 z)dz\,d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{2}\epsilon^2 z^2\right]_{z_{\min}}^{z_{\max}} d\varphi = \\
&= 2\pi\left(\frac{4}{3}z_{\max}^3 - \frac{1}{4}z_{\max}^4 - \frac{1}{2}\epsilon^2 z_{\max}^2 - \frac{4}{3}z_{\min}^3 + \frac{1}{4}z_{\min}^4 + \frac{1}{2}\epsilon^2 z_{\min}^2\right).
\end{aligned}$$

Kom ihåg att vår kropp

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4 \quad \text{och} \quad \rho \geq \epsilon\}$$

har en begränsningsyta som består dels av en cylinder

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho = \epsilon \quad \text{och} \quad z \in [z_{\min}, z_{\max}]\}$$

och en (trunkerad!) sfärisk yta

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4 \quad \text{och} \quad z \in [z_{\min}, z_{\max}]\},$$

d.v.s. $\partial K = C \cup S$. Därför är

$$\phi_{\text{tot}} = \phi_C + \phi_S$$

där ϕ_{tot} är det sammanlagda flödet ut ur kroppen K, ϕ_C är flödet ut genom cylindern C och ϕ_S är flödet ut genom den trunkerade sfäriska ytan S. Vi är intresserade av ϕ_S och måste därför beräkna ϕ_C. Detta är emellertid mycket enkelt, eftersom C är en del av ytan $\rho = \epsilon$ som är en koordinatyta i cylindriska koordinater!

Areaskalan på den här koordinatytan är $dA = \rho d\varphi dz$ och den (relativt området K) utåtriktade normalen är $-\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ i varje punkt. På C är också $\rho = \epsilon$. Eftersom $\widehat{\boldsymbol{\rho}} \cdot (-\widehat{\boldsymbol{\rho}}) = -1$ erhåller vi

$$\phi_C = \iint_C \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{n}} dA = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} z \frac{\rho^2 - 1}{\rho} \widehat{\boldsymbol{\rho}} \cdot (-\widehat{\boldsymbol{\rho}}) \cdot \rho d\varphi \, dz = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} z \frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon} \widehat{\boldsymbol{\rho}} \cdot (-\widehat{\boldsymbol{\rho}}) \cdot \epsilon d\varphi \, dz =$$
$$= -(\epsilon^2 - 1) \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} z d\varphi \, dz = -\pi(\epsilon^2 - 1)[z_{\max}^2 - z_{\min}^2].$$

Vi får alltså att flödet genom den trunkerade sfäriska ytan S är

$$\begin{aligned} \phi_S = \phi_{\text{tot}} - \phi_C = & \\ & = 2\pi \left(\frac{4}{3} z_{\max}^3 - \frac{1}{4} z_{\max}^4 - \frac{1}{2} \epsilon^2 z_{\max}^2 - \frac{4}{3} z_{\min}^3 + \frac{1}{4} z_{\min}^4 + \frac{1}{2} \epsilon^2 z_{\min}^2 \right) + \\ & + \pi(\epsilon^2 - 1)[z_{\max}^2 - z_{\min}^2]. \end{aligned}$$

När $\epsilon \to 0$ kommer den trunkerade sfäriska ytan S att närma sig hela den sfäriska begränsningsytan ∂D till det ursprungliga klotet D, så motsvarande flöde kommer att närma sig det sökta flödet. Det är klart att

$$z_{\max} = 2 + \sqrt{4 - \epsilon^2} \to 4 \quad \text{och}$$
$$z_{\min} = 2 - \sqrt{4 - \epsilon^2} \to 0$$

då $\epsilon \to 0$, så

$$\phi_S = 2\pi \left(\frac{4}{3} z_{\max}^3 - \frac{1}{4} z_{\max}^4 - \frac{1}{2} \epsilon^2 z_{\max}^2 - \frac{4}{3} z_{\min}^3 + \frac{1}{4} z_{\min}^4 + \frac{1}{2} \epsilon^2 z_{\min}^2 \right) + \pi(\epsilon^2 - 1)[z_{\max}^2 - z_{\min}^2] \to$$
$$\to 2\pi \left(\frac{4}{3} \cdot 64 - \frac{1}{4} \cdot 256 - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{4}{3} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) + \pi(0 - 1)[16 - 0] = \frac{80\pi}{3}.$$