Uppgift 9.20

Vi skall beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = \hat{\boldsymbol{\rho}}$ ut ur sfären $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$.

Lösning: Här är det förmodligen lättast att reducera problemet till motsvarande problem i kartesiska koordinater. I kartesiska koordinater är

$$\mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = \hat{\boldsymbol{\rho}}(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x/\rho \\ y/\rho \\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\rho}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x \\ y \\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x \\ y \\ 0\end{pmatrix}$$

eftersom den kartesiska ortsvektorn till punkten med cylindriska koordinater (ρ, φ, z) är

$$\mathbf{p}(\rho, \varphi, z) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z\end{pmatrix}.$$

Samtidigt är sfären $S = \mathbf{r}(D)$ där

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ 1+\cos\theta\end{pmatrix}, \qquad \forall(\theta, \varphi) \in D$$

och $D \coloneqq [0, \pi[\times [0, 2\pi]$. Därför är flödet

$$\begin{aligned}
\phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iint_D \mathbf{A}\big(\mathbf{r}(\theta, \varphi)\big) \cdot (\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi) d\theta d\varphi = \\
&= \iint_D \frac{1}{\sin\theta}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ 0\end{pmatrix} \cdot \sin\theta\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\end{pmatrix} d\theta d\varphi = \\
&= \iint_D \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ 0\end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\end{pmatrix} d\theta d\varphi = \\
&= \iint_D (\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi) d\theta d\varphi = \iint_D \sin^2\theta\, d\theta d\varphi = \\
&= \int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi = \pi^2.
\end{aligned}$$