Uppgift A 1.14

Deluppgift a)

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

Kvadratkomplettering ger

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a+b)^2}{4} + ab = 0$$

som ger

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{4ab}{4} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Vi har alltså tur att högerledet blir så enkelt som det blir!

Vi ser också att högerledet är noll eller positivt för alla (reella) värden på konstanterna a och b. Vi erhåller alltså

$$x - \frac{a+b}{2} = \pm\frac{a-b}{2}$$

som efter lite förenkling ger

$$x \in \{a, b\}.$$

Prövning ger att båda rötterna (givetvis) är korrekta.

Deluppgift b)

$$abx^2 + ab = a^2x + b^2x$$

Omsortering av termer ger

$$abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$$

eller

$$x^2 - \frac{a^2 + b^2}{ab}x + 1 = 0$$

så länge $ab \neq 0$.

Kvadratkomplettering ger

$$\left(x - \frac{a^2 + b^2}{2ab}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab}\right)^2 + 1 = 0.$$

För enkelhets skull inför vi här

$$k \equiv \frac{a^2 + b^2}{2ab},$$

så att ekvationen lyder

$$(x - k)^2 - k^2 + 1 = 0.$$

Detta förenklas till

$$(x - k)^2 = k^2 - 1,$$

och vi inser att ekvationen endast har reella lösningar om $k^2 - 1 \geq 0$, d.v.s. om $k \leq -1$ eller om $k \geq 1$.

I sådana fall är

$$x - k = \pm\sqrt{k^2 - 1}$$

Vi önskar nu förenkla högerledet.

Vi har

$$\sqrt{k^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2ab}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2ab}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}{4a^2b^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{4a^2b^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2b^2}} = \left|\frac{a^2 - b^2}{2ab}\right|.$$

Vi har alltså

$$x - k = x - \frac{a^2 + b^2}{2ab} = \pm\frac{a^2 - b^2}{2ab}.$$

Plustecknet ger

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2ab} + \frac{a^2 + b^2}{2ab} = \frac{a}{b}$$

medan minustecknet ger

$$x = -\frac{a^2 - b^2}{2ab} + \frac{a^2 + b^2}{2ab} = \frac{b}{a}.$$

Om å andra sidan $\boldsymbol{ab = 0}$ så är $a = 0$ eller $b = 0$.

Om $a = 0$ och $b \neq 0$ så är

$$0 = b^2x$$

vilket ger $x = 0$. Om å andra sidan $b = 0$ och $a \neq 0$ så är

$$0 = a^2x$$

vilket också ger $x = 0$.

Om $a = b = 0$ lyder ekvationen

$$0 = 0,$$

vilket är sant för alla x. Således, om $a = b = 0$ har ekvationen lösningsmängden $\mathbb{R}$.