Uppgift A 1.43 b

För vilka *x* gäller olikheten

$$\left|\frac{x-3}{x+1}\right| \geq 1?$$

Vi börjar med att skriva

$$\left|\frac{x-3}{x+1}\right| = \frac{|x-3|}{|x+1|}$$

och önskar nu borttaga beloppstecknen, så vi får en mer "vanlig" olikhet. Enligt definitionen av absolutbelopp är

$$|x| \equiv \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}.$$

Absolutbeloppet av ett positivt tal (eller noll) är alltså lika med talet självt, medan absolutbeloppet av ett negativt tal är lika med minus talet självt; ett absolutbelopp kan alltså sägas ta bort minustecken, eller ge avståndet mellan origo och talet på den reella tallinjen.

För att ta bort beloppstecknen i vår olikhet måste vi alltså veta om det som står innanför beloppstecknen är positivt eller negativt (eller noll). Vi inser att $x-3$ i täljaren växlar tecken precis för $x=3$, och att $x+1$ i nämnaren växlar tecken precis för $x=-1$. Detta betyder att såväl $x-3$ som $x+1$ har samma tecken överallt i intervallen mellan punkterna $x=3$ och $x=-1$.

Vi väljer därför att lösa olikheten i tre olika intervall: dels för $x<-1$, dels för $x \in]-1,3[$ och dels för $x \geq 3$.[1] Observera att när vi löst ekvationen i alla tre intervall, har vi löst den för alla reella tal $x \neq -1$. Fördelen med denna uppdelning är att vi i varje intervall slipper beloppstecknen; i stället för att lösa en "svår" olikhet med beloppstecken, får vi lösa tre "vanliga" olikheter.

Låt oss nu lösa ekvationen i vart och ett av fallen.

Fallet $x < -1$

Om $x<-1$ så är $x-3$ negativt och $x+1$ också negativt. Beloppstecknen måste alltså ersättas med minustecken. Olikheten lyder då

$$\frac{-(x-3)}{-(x+1)} \geq 1, \qquad x < -1.$$

Om vi förenklar vänsterledet och flyttar över ettan från högerledet erhåller vi

$$\frac{x-3}{x+1} - 1 \geq 0$$

som efter lite förenkling ger

[1] Vi inkluderar fallet $x=3$ i sista intervallet, eftersom beloppet av noll ersätts av noll självt, precis som ett positivt tal ersätts av det positiva talet självt. Vi inkluderar däremot *inte* fallet $x=-1$, varken i första eller andra intervallet, eftersom $x=-1$ ger division med noll.

$$\frac{-4}{x+1} \geq 0.$$

Vi inser att bråket $\frac{-4}{x+1}$ är positivt endast om nämnaren är negativ, d.v.s. endast om

$$x+1<0 \Leftrightarrow x<-1.$$

I intervallet $x<-1$ är alltså alla x som uppfyller olikheten $x<-1$ lösningar. Det betyder naturligtvis att *alla* x i intervallet $x<-1$ satisfierar olikheten.

Fallet $x \in]-1,3[$

I intervallet $x \in]-1,3[$ är $x-3$ negativt medan $x+1$ är positivt. Därför är $|x-3| = -(x-3)$ och $|x+1| = x+1$, så olikheten lyder

$$\frac{-(x-3)}{x+1} \geq 1.$$

Efter förenkling av vänsterledet ser vi att denna olikhet är ekvivalent med olikheten

$$2\,\frac{1-x}{x+1} \geq 0.$$

Täljaren ändrar tecken vid $x=1$ och nämnaren ändrar tecken vid $x=-1$. Vi erhåller då följande teckentabell:

x		-1		1	
$1-x$	+	+	+	0	−
$x+1$	−	0	+	+	+

Om vänsterledet i olikheten skall vara positivt, måste täljare och nämnare ha samma tecken. Vi ser olikheten endast är uppfylld i intervallet $x \in]-1,1]$. För $x=1$ lyder ju olikheten $0 \geq 0$, vilket är sant, så denna punkt inkluderas; punkten $x=-1$ kan vi dock inte ta med (eftersom vi då får division med noll). Eftersom intervallet $]-1,1]$ ligger inom $]-1,3[$ är det en sann rot.

Fallet $x \geq 3$

Om $x \geq 3$ är såväl $x-3$ som $x+1$ positiva, så vi kan bara ta bort beloppstecknen i olikheten. Vi erhåller då

$$\frac{x-3}{x+1} \geq 1$$

som efter en omskrivning ger

$$\frac{-4}{x+1} \leq 0.$$

Vi inser att detta medför att nämnaren måste vara negativ, d.v.s. att $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.

Men vi har ju förutsatt att $x \geq 3$, så vi får alltså *ingen* lösning i det här intervallet. (Att olikheten $\frac{x-3}{x+1} \geq 1$ aldrig uppfylles ses också enkelt då täljaren ju är mindre än nämnaren för alla $x \geq 3$.)

Om vi summerar allt ser vi att olikheten är uppfylld i intervallen $x < -1$ och $]-1,1]$.

Olikheten är alltså uppfylld för alla tal mindre eller lika med 1, förutom för punkten $x = -1$.

Att vi gjort rätt kontrolleras enkelt med hjälp av en dator. Nedan visas grafen till funktionen $f(x) = \left|\frac{x-3}{x+1}\right|$ (blå), som skall vara större eller lika med ett (rött). Vi ser att $\left|\frac{x-3}{x+1}\right| \geq 1$ precis där vi förutspådde det.