Uppgift A 1.66

Deluppgift a)

$$z + 3 - i = 7 + 3i \Leftrightarrow z = 4 + 4i$$

Deluppgift b)

$$7z - 3 + 2i = 4 + i \Leftrightarrow 7z = 7 - i \Leftrightarrow z = 1 - \frac{1}{7}i$$

Deluppgift c)

$$2\bar{z} + 1 + i = \overline{5 - 3i} = 5 + 3i \Leftrightarrow 2\bar{z} = 4 + 2i \Leftrightarrow \bar{z} = 2 + i \Leftrightarrow z = 2 - i$$

Deluppgift d)

$$(2 + 3i)z = 1 - i \Leftrightarrow z = \frac{1 - i}{2 + 3i} = \frac{(1 - i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{-1 - 5i}{13} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

Deluppgift e)

Denna uppgift är något svårare, eftersom den innehåller både z och $\bar{z}$. Vi får då skriva $z = a + bi$ och $\bar{z} = a - bi$. Ekvationen lyder då

$$(1 + i)(a + bi) + (7 + 2i)(a - bi) = 2 + 5i.$$

Utveckling av parenteserna i vänsterledet samt förenkling ger

$$8a + b + (3a - 6b)i = 2 + 5i.$$

Om dessa två komplexa tal skall vara lika, måste realdelarna och imaginärdelarna vara lika. Alltså måste

$$\begin{cases} 8a + b = 2 \\ 3a - 6b = 5. \end{cases}$$

Lösning av detta ekvationssystem[1] ger

$$a = 1/3$$

och

$$b = -\frac{2}{3}.$$

Således är

$$z = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i.$$

[1] Lös t.ex. ut $b = 2 - 8a$ i första ekvationen och infoga detta i den andra ekvationen. Detta ger $a = 1/3$ som sedan ger $b = 2 - \frac{8}{3} = -2/3$.