Uppgift A 1.78

Ekvationen

$$p(z) = 2z^4 + 11z^3 + 33z - 18 = 0$$

har en rent imaginär rot. Låt oss kalla den

$$z_1 = bi.$$

Eftersom polynomet p har reella koefficienter, har vi då också roten

$$z_2 = -bi.$$

Vi önskar nu finna det reella talet b, vilket låter sig göras genom lösning av ekvationen

$$p(bi) = 0.$$

Vi erhåller

$$2b^4 - 11ib^3 + 33bi - 18 = 0$$

där vänsterledet är ett komplext tal med realdel

$$Re\{p(bi)\} = 2b^4 - 18$$

och imaginärdel

$$Im\{p(bi)\} = -11b^3 + 33b.$$

Eftersom det komplexa talet

$$p(bi) = 0$$

måste både realdel och imaginärdel vara lika med noll. Att t.ex. realdelen måste vara noll ger

$$2b^4 - 18 = 0 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3}.$$

Vi vet nu alltså att ekvationen har de två rötterna

$$z_1 = -\sqrt{3}i, \qquad z_2 = \sqrt{3}i,$$

varför den måste innehålla faktorerna

$$\left(z + \sqrt{3}i\right), \qquad \left(z - \sqrt{3}i\right)$$

och i själva verket faktorn

$$\left(z + \sqrt{3}i\right) \cdot \left(z - \sqrt{3}i\right) = z^2 + 3.$$

Polynomdivision ger sedan att

$$\frac{2z^4 + 11z^3 + 33z - 18}{z^2 + 3} = 2z^2 + 11z - 6 = 2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z + 6).$$

Således är

$$p(z) = 2z^4 + 11z^3 + 33z - 18 = 2\left(z + \sqrt{3}i\right)\left(z - \sqrt{3}i\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)(z + 6)$$

och lösningsmängden till ekvationen $p(z) = 0$ är

$$\left\{-\sqrt{3}i, \qquad \sqrt{3}i, \qquad -6, \qquad \frac{1}{2}\right\}$$