Uppgift A 2.2

Vi skall visa att funktionen

$$f: x \mapsto x^3 + x$$

har en invers (d.v.s. är *injektiv*).

En funktion är injektiv om den är strängt *monoton*, d.v.s. om den antingen är strängt *växande* eller strängt *avtagande*. (Eller hur?)

Från gymnasiet är det välbekant att en funktion är strängt monotom om derivatan alltid har samma tecken. Om tecknet är positivt i hela definitionsmängden är funktionen strängt växande, och om tecknet är negativt i hela definitionsmängden är funktionen strängt avtagande.

Funktionen f har derivatan

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

som *aldrig är noll*, inte för något värde på *x* (varför?)! Detta betyder att derivatan alltid har samma tecken[1] , och följaktligen att funktionen f är injektiv.

Inversen f^{-1} är den funktion som tar in ett funktionsvärde för f och ger ifrån sig det värde på x för vilket f antar det givna funktionsvärdet. Om vi stoppar in $x = 0$ i inversen, får vi alltså det tal för vilket funktionen f antar värdet 0. Vi inser att detta tal är $f^{-1}(0) = 0$, eftersom $f(0) = 0$ På motsvarande sätt finner vi

$$f^{-1}(2) = 1,$$
$$f^{-1}(-2) = -1 \text{ och}$$
$$f^{-1}(10) = 2.$$

Därmed är uppgiften löst.

[1] Detta kan tyckas självklart, men är faktiskt inte en giltig slutsats om derivatan inte vore kontinuerlig. Nu är den dock det, så vi behöver inte oroa oss för denna komplikation.