Uppgift 2.76 a)

Vi skall beräkna summan

$$3\arctan 2-\arctan\frac{2}{11}=\arctan 2+\arctan 2+\arctan 2+\arctan\frac{-2}{11}.$$

Vi börjar med att räkna ut tangens för summan.

$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan 2+\arctan 2+\arctan 2+\arctan\frac{-2}{11}\right)\\ &=\frac{\tan(\arctan 2+\arctan 2+\arctan 2)+\tan\arctan\frac{-2}{11}}{1-\tan(\arctan 2+\arctan 2+\arctan 2)\tan\arctan\frac{-2}{11}}\\ &=\frac{\tan(\arctan 2+\arctan 2+\arctan 2)+\frac{-2}{11}}{1-\tan(\arctan 2+\arctan 2+\arctan 2)\cdot\frac{-2}{11}},\end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned}\tan(\arctan 2+\arctan 2+\arctan 2)&=\frac{\tan(\arctan 2+\arctan 2)+\tan\arctan 2}{1-\tan(\arctan 2+\arctan 2)\tan\arctan 2}\\ &=\frac{\tan(\arctan 2+\arctan 2)+2}{1-\tan(\arctan 2+\arctan 2)\cdot 2},\end{aligned}$$

där

$$\tan(\arctan 2+\arctan 2)=\frac{\tan\arctan 2+\tan\arctan 2}{1-\tan\arctan 2\tan\arctan 2}=\frac{2+2}{1-2\cdot 2}=-\frac{4}{3}.$$

Därför är

$$\tan(\arctan 2+\arctan 2+\arctan 2)=\frac{-\frac{4}{3}+2}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 2}=\frac{2}{11}$$

och

$$\tan\left(\arctan 2+\arctan 2+\arctan 2+\arctan\frac{-2}{11}\right)=\frac{\frac{2}{11}+\frac{-2}{11}}{1-\frac{2}{11}\cdot\frac{-2}{11}}=0$$

Detta betyder att vinkeln

$$\arctan 2+\arctan 2+\arctan 2+\arctan\frac{-2}{11}=3\arctan 2-\arctan\frac{2}{11}=n\pi,$$

eftersom tangens av $n\pi$, med $n\in\mathbb{Z}$, alltid är noll. Vi inser dock, genom att titta i enhetscirkeln, att vinkeln $3\arctan 2-\arctan\frac{2}{11}$ bör ligga nära just vinkeln π, så vi väljer $n=1$ och summan blir därmed

$$3\arctan 2-\arctan\frac{2}{11}=\pi.$$