Uppgift B 2.35

Deluppgift a)

Vi skall visa att

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

med hjälp av

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.$$

Vi sätter nu $v \equiv -x$ i den andra ekvationen. Detta ger

$$\cos\big(u-(-x)\big) = \cos u \cos(-x) + \sin u \sin(-x).$$

Eftersom $\cos(-x) = \cos x$ och $\sin(-x) = -\sin x$ erhåller vi

$$\cos(u+x) = \cos u \cos x - \sin u \sin x$$

och vi är klara.

Deluppgift b)

Vi skall nu använda formlerna i deluppgift a) för att visa att

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v.$$

Vi behöver också använda

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v$$

och

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin v.$$

Vi sätter nu $u \equiv \frac{\pi}{2} - x$ i additionsformeln för cosinus (första formeln på sidan). Detta ger

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x + v\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos v - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin v.$$

Vänsterledet kan vi skriva

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x + v\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x-v)\right) = \sin(x-v)$$

medan högerledet får utseendet

$$\sin x \cos v - \cos x \sin v.$$

Vänsterledet är naturligtvis lika med högerledet, så vi har visat att

$$\sin(x-v) = \sin x \cos v - \cos x \sin v\,.$$

Genom ett förfarande i princip identiskt med det i deluppgift a) visar vi sedan att

$$\sin(x+v) = \sin x \cos v + \cos x \sin v\,.$$

Därmed är uppgiften till belåtenhet löst.