Uppgift B 2.36

Vi vet att $\sin u = \sin v = \frac{1}{3}$ och att $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ och $v \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Vi skall räkna ut $\sin(u+v)$ och $\cos(u-v)$.

Lösning: Vi har

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v = \frac{1}{3}\cos v + \frac{1}{3}\cos u.$$

Trigonometriska ettan $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ ger $\cos^2 v = 1 - \sin^2 v$, d.v.s.

$$\cos v = \pm\sqrt{1-\sin^2 v} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \pm\frac{\sqrt{8}}{3} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Men eftersom $v \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ är $\cos v < 0$ varför vi kan dra slutsatsen

$$\cos v = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

På liknande sätt finner vi

$$\cos u = \pm\sqrt{1-\sin^2 u} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

men eftersom $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ är $\cos u > 0$ så

$$\cos u = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Sålunda har vi

$$\sin(u+v) = \frac{1}{3}\cos v + \frac{1}{3}\cos u = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.$$

Anmärkning: Man kan också se att sinus av summan blir noll *direkt* genom att rita en enhetscirkel, rita linjen $y = \frac{1}{3}$ och på så sätt se direkt att $u + v = \pi$, så $\sin(u+v) = 0$.

Låt oss nu ta och beräkna

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v = \cos u \cos v + \frac{1}{9}.$$

Vi har redan insett att $\cos v = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ och $\cos u = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Därför är

$$\cos(u-v) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{1}{9} = -\frac{8}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{7}{9}.$$