Uppgift B 2.37

Deluppgift A

Vi skall lösa ekvationen $\sin^2 v + \sin v \cos v = \frac{1}{2}$.

Lösning:

Eftersom $\sin v \cos v = \frac{1}{2}\sin 2v$ kan ekvationen skrivas $\sin^2 v + \frac{1}{2}\sin 2v = \frac{1}{2}$ som är ekvivalent med

$$\sin 2v = 1 - 2\sin^2 v = \sin^2 v + \cos^2 v - 2\sin^2 v = \cos^2 v - \sin^2 v = \cos 2v.$$

$\sin 2v = \cos 2v$ inträffar precis då

$$2v = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

för något $n \in \mathbb{Z}$, d.v.s. precis då

$$v = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Deluppgift B

Vi skall lösa ekvationen $\tan\left(v + \frac{\pi}{4}\right) - \tan v = 1$.

Lösning: Notera att både $\tan v$ och $\tan\frac{\pi}{4}$ är definierat. Tangens summaformel ger därför

$$\tan\left(v + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan v + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan v \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan v + 1}{1 - \tan v}$$

så att ekvationen kan skrivas

$$\frac{\tan v + 1}{1 - \tan v} = 1 + \tan v.$$

Sätt $t \coloneqq \tan v$ så att

$$\frac{t+1}{1-t} = 1 + t \Leftrightarrow t + 1 = 1 - t^2 \Leftrightarrow t = -t^2 \Leftrightarrow t(1+t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-1, 0\}.$$

Om $t = \tan v = 0$ så är $v = n\pi$ för något $n \in \mathbb{Z}$, medan $\tan v = -1$ ger $v = \frac{3\pi}{4} + n\pi$. Alltså är

$$\tan\left(v + \frac{\pi}{4}\right) - \tan v = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} v = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \text{eller} \\ v = \dfrac{3\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$