Uppgift B 2.55

$$\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}+\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$
$$=\cos\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\cos\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}-\sin\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\sin\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\cos\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}-\frac{3}{\sqrt{13}}\sin\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Vi behöver nu veta vad $\cos\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$ och $\sin\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$ är.

- $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$ är den vinkel v i intervallet $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ för vilken $\sin v=\frac{3}{\sqrt{13}}$. Vi inser att denna vinkel finns i första kvadranten, eftersom $\sin v>0$. Det betyder att vi med hjälp av Pythagoras sats kan erhålla $\cos v=+\sqrt{1-\sin^2 v}=\sqrt{\frac{4}{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$.
- $\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$ är den vinkel v i intervallet $[0,\pi]$ för vilken $\cos v=\frac{1}{\sqrt{26}}$. Vi inser att denna vinkel också finns i första kvadranten, eftersom $\cos v>0$. Vi kan med Pythagoras sats erhålla $\sin v=+\sqrt{1-\cos^2 v}=\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5}{\sqrt{26}}$.

Således är

$$\cos\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}\quad\text{och}$$
$$\sin\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{5}{\sqrt{26}}.$$

Vi erhåller då

$$\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}+\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}-\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{5}{\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}}-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{26}}\frac{5}{\sqrt{26}}=\frac{2\sqrt{2}}{26}-\frac{15\sqrt{2}}{26}$$
$$=-\frac{13\sqrt{2}}{26}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Detta betyder att vinkeln

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}+\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}=\pm\frac{3\pi}{4}+n\cdot 2\pi$$

eftersom vinklarna $\pm\frac{3\pi}{4}$ har cosinusvärdet $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vi inser dessutom att summan

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}+\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$$

måste ligga i intervallet $[0,\pi]$, varför vi väljer plustecknet och

$$n=0$$

och

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}+\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\pi}{4}.$$