Uppgift P1.25

Teori

Divisonsalgoritmen säger att givet två polynom $p(x)$ och $q(x)$ så finns det alltid en entydigt bestämd kvot $k(x)$ och rest $r(x)$ sådana att

$$p(x) = k(x)q(x) + r(x)$$

och $\deg r(x) < \deg q(x)$. Ett specialfall är när nämnaren

$$q(x) = x - a$$

är ett (moniskt) förstagradspolynom. I så fall har vi

$$p(x) = k(x)(x - a) + r.$$

Eftersom nämnaren $q(x)$ är ett förstagradspolynom, så måste resten $r(x)$ vara en konstant; det är därför jag skriver r i stället för $r(x)$. Ekvationen ovan gäller för alla $x \in \mathbb{R}$. I synnerhet gäller den för $x = a$, i vilket fall vi erhåller

$$p(a) = k(a)(a - a) + r,$$

d.v.s.

$$\boxed{p(a) = r.}$$

I ord: Om vi delar ett polynom $p(x)$ med förstagradspolynomet $x - a$ så blir resten lika med $p(a)$.

Deluppgift A

Vi skall bestämma resten när polynomet

$$p(x) = x^{100} + x^{67} - x^{32} - 2x^9 + 1$$

divideras med $x - 1$. Enligt vår allmänna observation ovan är den sökta resten

$$r = p(1) = 1^{100} + 1^{67} - 1^{32} - 2 \cdot 1^9 + 1 = 1 + 1 - 1 - 2 + 1 = 0.$$

Deluppgift B

Om vi i stället dividerar samma polynom med $x + 2 = x - (-2)$ erhåller vi resten

$$r = p(-2) = (-2)^{100} + (-2)^{67} - (-2)^{32} - 2(-2)^9 + 1 = 2^{100} - 2^{67} - 2^{32} + 2^{10} + 1.$$