Uppgift 15.6

Avbildningen $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ges i standardbasen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi skall bestämma baser för $N(F)$, $V(F)$ samt $N(F) \cap V(F)$.

Lösning: Nollrummet $N(F)$ ges av $AX = 0$, d.v.s.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

med lösningen

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så att

$$N(F) = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Värderummet är

$$V(F) = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{(t.ex.)}$$

eftersom vi har exakt två löjliga element [vilket man inte ens behöver kontrollera separat eftersom vi har den förträffliga dimensionssatsen, som här säger att $\underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{=4} = \underbrace{\dim N(F)}_{=2} + \dim V(F)$]. Vi skall slutligen bestämma en bas för snittet $N(F) \cap V(F)$. Antag att $(x, y, z, w) \in N(F) \cap V(F)$. Då finns det tal s, t, s' och t' så att

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s'\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t'\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Detta är fyra ekvationer i fyra obekanta, nämligen

$$
\begin{aligned}
&s = s' + 2t' \\
&-s - t = s' + 2t' \\
&s = -2s' - t' \\
&t = s' - t'
\end{aligned}
$$

d.v.s.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ s' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

med lösningen

$$
\begin{pmatrix} s \\ t \\ s' \\ t' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Vi kan nu använda *__antingen__* s och t samt parametriseringen av $N(F)$ *__eller__* s' och t' samt parametriseringen av $V(F)$ för att erhålla parametriseringen av en godtycklig punkt $(x, y, z, w) \in N(F) \cap V(F)$. Det första alternativet ger

$$
\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \lambda \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\lambda \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

så att

$$
N(F) \cap V(F) = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right].
$$

[Det andra alternativet ger

$$
\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = -\lambda \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.]
$$