Uppgift 17.6

Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en bas i det tredimensionella vektorrummet $\mathbb{V}$. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ har i basen $\underline{\mathbf{e}}$ matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi inför

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{f}_2 &= F\mathbf{e}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \\ \mathbf{f}_3 &= F^2\mathbf{e}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{g}_2 &= F\mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \\ \mathbf{g}_3 &= F^2\mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi undrar om $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3)$ och $\underline{\mathbf{g}} = (\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \mathbf{g}_3)$ är baser. Tre vektorer i rummet är en bas för rummet omm de är linjärt oberoende, d.v.s. omm de *inte* ligger i samma plan, d.v.s. omm deras volymprodukt är nollskild[1]. I de respektive fallen är

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 | \mathbf{f}_3) &= 1 \quad \text{samt} \\ (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 | \mathbf{g}_3) &= 0. \end{aligned}$$

Alltså utgör $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3)$ en bas, men inte $\underline{\mathbf{g}} = (\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \mathbf{g}_3)$. Basbytesmatrisen från $\underline{\mathbf{e}}$ till $\underline{\mathbf{f}}$ är

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

så i basen $\underline{\mathbf{f}}$ har F matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1} A_{\underline{\mathbf{e}}} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1] Ett alternativt sätt att avgöra linjärt oberoende är att undersöka determinanten av (den föreslagna) basbytesmatrisen, som ju har samma värde som volymprodukten.