Uppgift 19.4

Betrakta den kvadratiska formen $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definierad av

$$Q(\mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3, \qquad \forall \mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Vi skall bestämma största och minsta värdet av Q på enhetssfären samt ange var på sfären dessa extremvärden antas.

Lösning:

Den kvadratiska formen har matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

med egenvärden

$$\lambda_{1,2} = 2, \qquad \lambda_3 = -1$$

och motsvarande egenrum

$$E_{1,2} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \qquad E_3 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

$E_{1,2}$ är ett plan genom origo med ekvation $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ (varför?) och E_3 är en linje genom origo. Vi använder nu satsen

$$\lambda_{\min}|\mathbf{u}|^2 \le Q(\mathbf{u}) \le \lambda_{\max}|\mathbf{u}|^2, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$$

där $\lambda_{\min} = -1$ och $\lambda_{\max} = 2$ är minsta respektive största egenvärdet till Q. Eftersom vi bara är intresserade av punkter på enhetssfären $|\mathbf{u}| = 1$ så är

$$-1 \le Q(\mathbf{u}) \le 2, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ med } |\mathbf{u}| = 1.$$

Likhet erhålles precis då $\mathbf{u}$ är en egenvektor till respektive egenvärde. Egenrummet E_3 till $\lambda_{\min} = -1$ är endimensionellt och de enda punkterna på enhetssfären som också tillhör E_3 är $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$ så

$$Q(\mathbf{u}) = -1 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Egenrummet $E_{1,2}$ till $\lambda_{\max} = 2$ är ett plan genom origo med ekvation $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Detta skär förstås enhetscirkeln längs en storcirkel. Kalla den C, d.v.s. $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = 1 \quad \wedge \quad \mathbf{x} \in E_{1,2}\}$. Då är

$$Q(\mathbf{u}) = 2 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in C.$$

(Du behöver inte parametrisera storcirkeln C.)