Uppgift 21.4

Vi skall lösa systemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Lösning:

Låt

$$\mathbf{v}(t) = \underline{\mathbf{e}} X_{\underline{\mathbf{e}}}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}'(t) = \underline{\mathbf{e}} X_{\underline{\mathbf{e}}}'(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}, \qquad A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

så att

$$X_{\underline{\mathbf{e}}}'(t) = A_{\underline{\mathbf{e}}} X_{\underline{\mathbf{e}}}(t).$$

Vi byter nu till en egenbas till A. Egenvärdena är

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_{2,3} = -1$$

och de tillhörande egenrummen är

$$E_1 = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \qquad E_{2,3} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Inför en egenbas $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3)$ där

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Låt T vara basbytesmatrisen. I den nya basen är avbildningsmatrisen diagonal med egenvärdena på diagonalen:

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Om vi låter

$$\mathbf{v}(t) = \underline{\mathbf{f}} X_{\underline{\mathbf{f}}}(t) = \underline{\mathbf{f}} (y_1(t) \quad y_2(t) \quad y_3(t))^T, \qquad \mathbf{v}'(t) = \underline{\mathbf{f}} X_{\underline{\mathbf{f}}}'(t) = \underline{\mathbf{f}} \big(y_1'(t) \quad y_2'(t) \quad y_3'(t)\big)^T$$

så är

$$X_{\underline{\mathbf{f}}}'(t) = A_{\underline{\mathbf{f}}} X_{\underline{\mathbf{f}}}(t),$$

d.v.s.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Vi har alltså kopplat isär ekvationerna.

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 \Leftrightarrow y_1(t) = D_1 e^{2t} \\ y_2' &= -y_2 \Leftrightarrow y_2(t) = D_2 e^{-t} \\ y_3' &= -y_3 \Leftrightarrow y_3(t) = D_3 e^{-t}. \end{aligned}$$

Begynnelsevektorn

$$\mathbf{v}(0) = \underline{\mathbf{e}} X_{\underline{\mathbf{e}}}(0) = \underline{\mathbf{f}} X_{\underline{\mathbf{f}}}(0)$$

där

$$X_{\underline{\mathbf{f}}}(0) = T^{-1} X_{\underline{\mathbf{e}}}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

så att

$$D_1 = 1, \qquad D_2 = -1, \qquad D_3 = 0.$$

Alltså är lösningen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t}\mathbf{f}_1 - e^{-t}\mathbf{f}_2 = e^{2t}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-t}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{-t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} - e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d.v.s.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{2t} + e^{-t} \\ x_2(t) &= e^{2t} \\ x_3(t) &= e^{2t} - e^{-t}. \end{aligned}$$