Uppgift 22.4

Betrakta ytan $x_3^2 - 2x_1x_2 = 4$ och låt d vara avståndet från en punkt på ytan till origo. Vi skall skissa ytan samt bestämma vilka värden d kan antaga. I förekommande fall skall vi även ge exempel på punkter där d antar sina extremvärden.

Lösning:

Ytan är nivåytan $Q(\mathbf{u}) = 4$ till den kvadratiska formen

$$Q(\mathbf{u}) = x_3^2 - 2x_1x_2, \qquad \forall \mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Q beskrivs av den symmetriska matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som har egenvärden

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_{2,3} = 1$$

och motsvarande egenrum

$$E_1 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \qquad E_{2,3} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Notera att den algebraiska multipliciteten för varje egenvärde är lika med dess geometriska multiplicitet, vilket alltid är fallet om vi har en symmetrisk matris (enligt spektralsatsen). Dessutom är varje vektor i $E_{2,3}$ vinkelrät mot varje vektor i E_1, vilket också är garanterat. Vi inför en ON-egenbas $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3)$ genom

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu uttrycka den kvadratiska formen i den nya basen:

$$Q(\mathbf{u}) = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \qquad \forall \mathbf{u} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

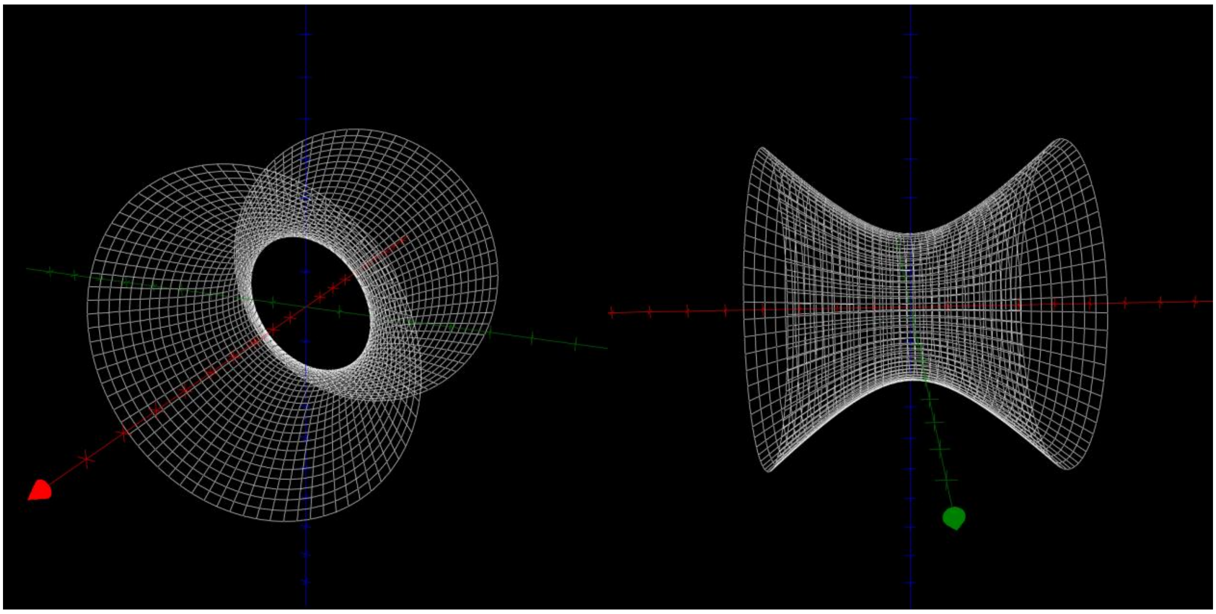
Alltså har vår yta ekvationen

$$-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 4$$

i vårt nya koordinatsystem (vars axlar bara är roterade i förhållande till det gamla). Ytan är alltså en cirkulär enmantlad hyperboloid med y_1-axeln som symmetriaxel. Standardformen är

$$-\left(\frac{y_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_3}{2}\right)^2=1.$$

I figurerna nedan är y_1-axeln röd, y_2-axeln grön och y_3-axeln blå.



Det är klart att d kan antaga hur stora värden som helst. Däremot är ytan som närmast origo där $y_1 = 0$, d.v.s. på cirkeln

$$y_1 = 0, \qquad \left(\frac{y_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_3}{2}\right)^2=1$$

som är en cirkel i y_2y_3-planet med radie 2. Alltså är

$$d \geq 2$$

och likhet antages t.ex. i punkten

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{f}_3 = 2\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Anmärkning: Hur ser man hur en cirkulär enmantlad hyperboloid, såsom $-y_1^2+y_2^2+y_3^2=4$, ser ut? Vi kan skriva ytan $y_2^2+y_3^2=4+y_1^2$. Det är då klart att för *varje* fixt $y_1 = c \in \mathbb{R}$ har vi en cirkel (därav ”cirkulär”) med radie åtminstone 2. Samtidigt ser vi att då $y_2 = 0$ (säg) så lyder ekvationen $-y_1^2+y_3^2=4$ vilket är en typisk hyperbel. ”Kanterna” är alltså hyperbler. (Det är ju uppenbart att vi får en hyperbel när vi skär ytan med ett *godtyckligt* plan som innehåller y_1-axeln.)