Uppgift 9.1

Deluppgift A

Vi skall visa att vektorerna $(2, 0, 2)$, $(1, 1, 1)$ och $(0, 1, -1)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

Vi måste alltså undersöka om de är linjärt oberoende eller inte. För om de är det, så utgör de en bas för $\mathbb{R}^3$ (som ju är tre-dimensionellt). Det finns åtminstone två rimliga sätt att gå till väga. Dels kan vi använda definitionen av linjärt beroende, d.v.s. vi betraktar beroendeekvationen

$$\alpha\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \beta\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

som också kan skrivas som en matrisekvation

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

I vilket fall som helst är det hela förstås ett helt vanligt linjärt ekvationssystem i tre ekvationer och med tre obekanta, d.v.s.

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

(kontrollera att alla dessa tre påståenden säger samma sak!). Om vi löser ekvationssystemet, t.ex. genom att ställa upp det med den så kallade ”totalmatrisen”, får vi

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0$$

som den enda lösningen. Alltså är de tre vektorerna linjärt oberoende, och därmed en bas för $\mathbb{R}^3$.

En genväg till att avgöra ”det linjära oberoendet” är att notera att tre vektorer i rummet är linjärt oberoende omm de *inte* ligger i samma plan, d.v.s. omm de genererar en parallellepiped med nollskild volym, d.v.s. omm volymprodukten (trippelprodukten) är nollskild. I det här fallet får vi

$$\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = -2$$

som ju är nollskilt.

Deluppgift B

Vektorerna

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

bildar alltså en bas för $\mathbb{R}^3$. Låt oss kalla den $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3)$.

Vi skall skriva vektorn $\mathbf{v} = (3, -1, 5)$ som en linjärkombination av de nya basvektorerna, d.v.s. vi skall hitta koordinaterna för $\mathbf{v}$ uttryckt i basen $\underline{\mathbf{f}}$. Vi vill alltså hitta tre tal α, β och γ så att

$$\boldsymbol{v} = \alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{f}_3$$

d.v.s.

$$\alpha\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \beta\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}.$$

Men detta är också ett helt vanligt ekvationssystem som kan skrivas på formen

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{aligned}2\alpha + \beta &= 3\\ \beta + \gamma &= -1\\ 2\alpha + \beta - \gamma &= 5.\end{aligned}$$

Lösningen, som t.ex. kan tas fram genom uppställning av ”totalmatrisen”, är

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = -2.$$

Vi har alltså

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

d.v.s. i standardbasen $\underline{\mathbf{e}}$ har $\mathbf{v}$ koordinamatrisen $X_e = \begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$ och i den nya basen $\underline{\mathbf{f}}$ har $\mathbf{v}$ koordinatmatrisen $X_f = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Det mer automatiska sättet att lösa deluppgiften är att införa den så kallade basbytesmatrisen

$$T = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

vars kolonner utgörs av *de nya basvektorernas koordinater i den gamla basen*. Då gäller, uppenbarligen, det *formella* sambandet $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T$ (fundera på det!) och om $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}X_e = \underline{\mathbf{f}}X_f$ så gäller koordinatsambandet

$$X_f = T^{-1}X_e$$

vilket vi faktiskt bevisade ovan! (Överkurs: Notera också att vektorerna $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ utgör en bas för rummet om och endast om matrisen T definierad enligt ovan är inverterbar. Återvänd till den här uppgiften när du lärt dig vad en ”determinant” är, och jämför då med volymprodukten i fallet $\mathbb{R}^3$!)