Linjär algebra på några minuter

Linjära ekvationssystem

Ekvationssystem:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + y - z = 5 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$$

Löses på matrisform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

I det här fallet finns en entydig lösning, vilket betyder att determinanten av koefficientmatrisen är nollskild. Linjära ekvationssystem kan också sakna lösningar, eller ha oändligt många. Notera att systemet kan tolkas som skärningspunkterna mellan tre plan i rummet.

Löses med matrisekvation:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \quad \text{om} \quad \det A \neq 0.$$

Vektorer

Geometrisk definition:

En **vektor** är en riktad sträcka, d.v.s. en pil som bestäms av sin storlek och riktning, men inte av sin position.

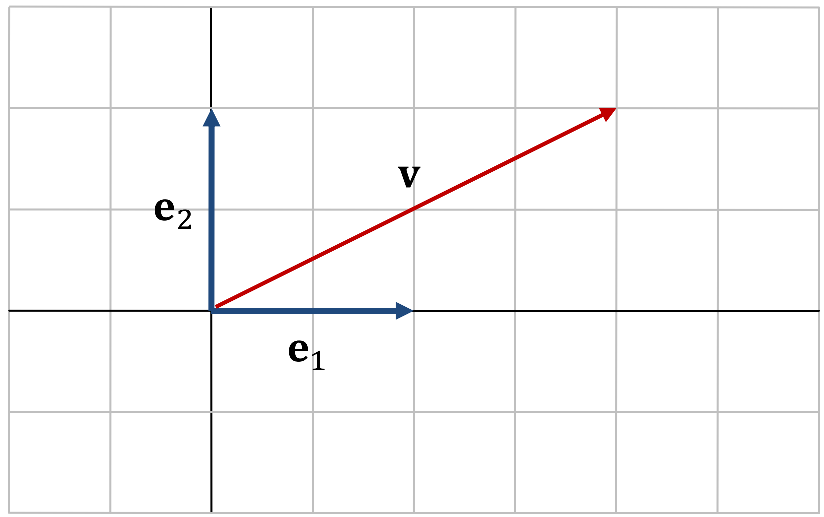
Algebraisk definition:

En **vektor** i ett (reellt) n-dimensionellt rum är ett objekt på formen

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

där alla x_i är reella tal.

Baser och koordinatsystem

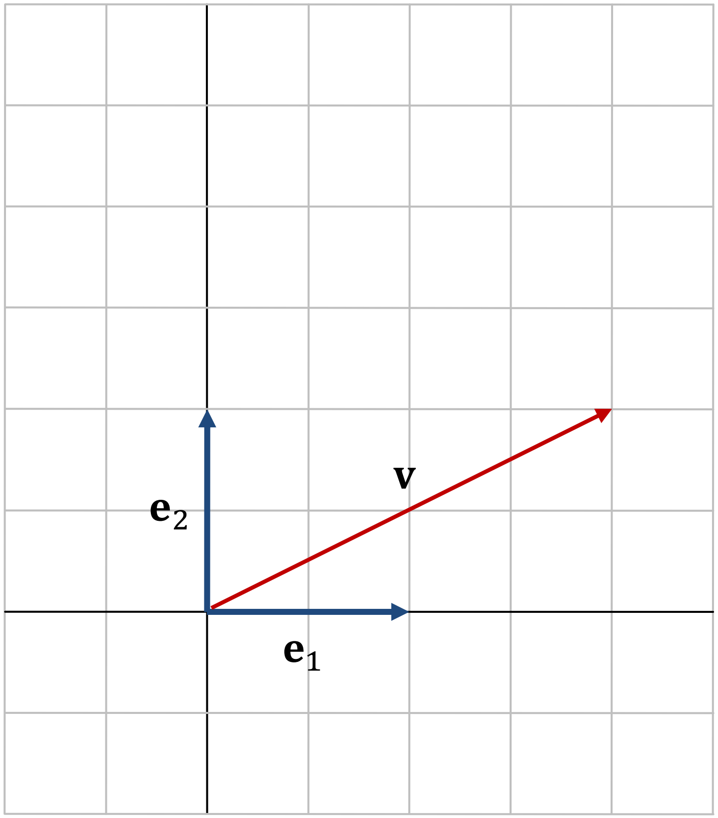


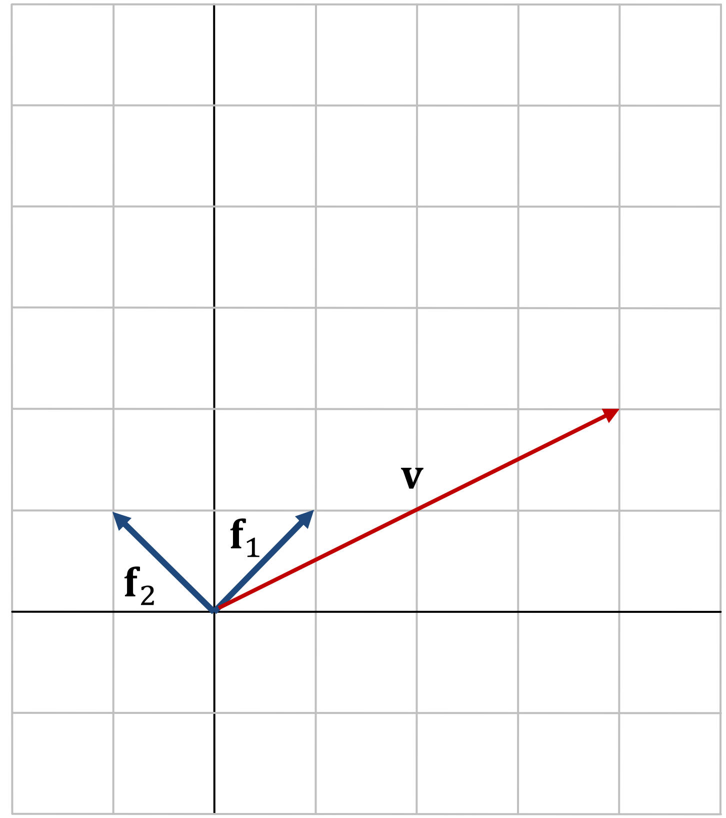
$$\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = 2 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) = (2, 1)$$

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatmatrisen $X_{\underline{\mathbf{e}}}$

Baser och koordinatsystem





$$\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = $$
$$= (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X_{\underline{\mathbf{e}}}}$$

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 = $$
$$= (\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X_{\underline{\mathbf{f}}}}$$

Basbyte

Låt $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n)$ vara standardbasen och $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{f}_n)$ en ny bas. Låt T vara **basbytesmatrisen**, d.v.s. den matris vars kolonner utgörs av $\mathbf{f}$-vektorernas koordinater uttryckta i standardbasen, d.v.s.

$$T = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{f}_1 & \cdots & \mathbf{f}_n \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Om

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}} X_{\underline{\mathbf{e}}} = \underline{\mathbf{f}} X_{\underline{\mathbf{f}}}$$

så gäller

Koordinatsambandet

$$X_{\underline{\mathbf{e}}} = T X_{\underline{\mathbf{f}}}.$$

Det omvända sambandet är (givetvis!) $X_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1} X_{\underline{\mathbf{e}}}$.

Vektorrum (axiom, formell definition) *

Låt K vara en **kropp** (till exempel $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$; i den här kursen alltid $\mathbb{R}$). En icke-tom mängd V säges vara ett **vektorrum över K** om

I. Det finns en operation $V \times V \to V$ kallad **addition** (+) så att

a. V är sluten under +	$\mathbf{u} \in V \wedge \mathbf{v} \in V \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
b. + kommuterar	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
c. + är associativ	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
d. det finns ett neutralt element $\mathbf{0} \in V$	$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
e. till varje $\mathbf{v} \in V$ finns en invers $(-\mathbf{v})$	$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

II. Det finns en operation $K \times V \to V$ kallad **multiplikation med skalär** ($\cdot$) så att

a. V är sluten under $\cdot$	$\lambda \in K \wedge \mathbf{v} \in V \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{v} \in V$
b. ettan i K är neutral i operationen	$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
c. $\cdot$ är ”associativ”	$\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{u}$
d. $\cdot$ distribuerar över + i K	$(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u}$
e. $\cdot$ distribuerar över + i V	$\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$

Element i V kallas **vektorer** och element i K kallas **skalärer**.

(Notera att kraven I.a och II.a egentligen är överflödiga.)

Vektorrum

Det finns många vektorrum (mängder och operationer som uppfyller axiomen). Till exempel finns det rum av geometriska vektorer, rum av matriser, rum av funktioner, osv.

Men i den här kursen avser vi nästan alltid $\mathbb{R}^n$ när vi pratar om ett vektorrum. $\mathbb{R}^n$ är ju mängden av alla n-tupler $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ under vanlig vektoraddition och multiplikation med skalär, och dessa operationer uppfyller axiomen för vektorrum.

$\mathbb{R}$:	/mängden av alla punkter på/ tallinjen
$\mathbb{R}^2$:	/mängden av alla punkter i/ planet
$\mathbb{R}^3$:	/mängden av alla punkter i/ rummet
$\vdots$	

Polynomrummet P_n

Ibland räknar vi också med polynomrummet P_n, som är mängden av alla polynom av grad n eller lägre.

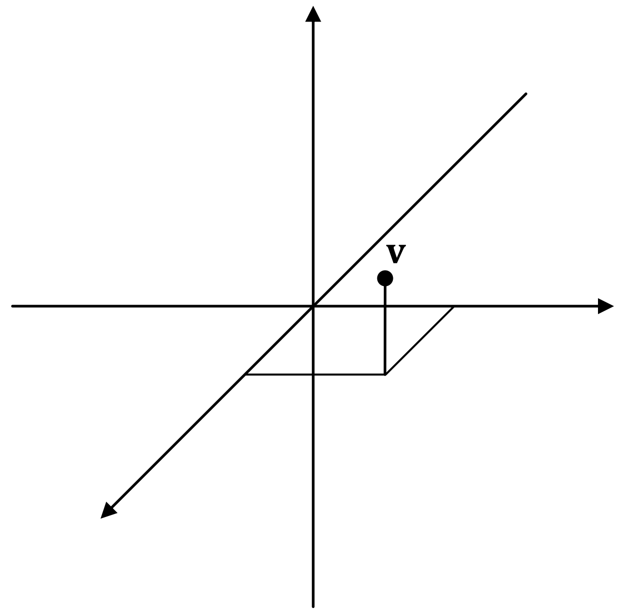
Observera att

$$\dim P_n = n + 1.$$

Till exempel krävs ju fyra tal för att entydigt ange ett polynom av grad tre:

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Polynomrummet P_n fungerar likadant som $\mathbb{R}^{n+1}$



I $\mathbb{R}^3$: $\quad \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \frac{3}{4}\mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

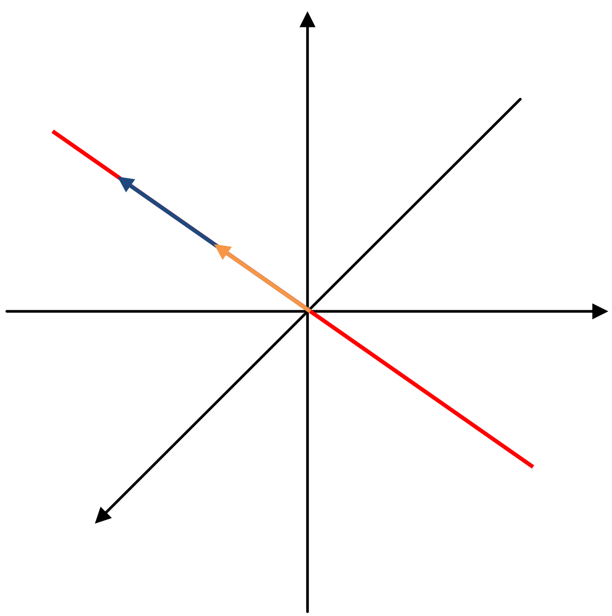
I P_2: $\quad \mathbf{v} = 1 + x + \frac{3}{4}x^2 = (1 \quad x \quad x^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$ och P_2 är i själva verket **isomorfa**. Slutsats: I den här kursen arbetar vi nästan uteslutande i rummet $\mathbb{R}^n$.

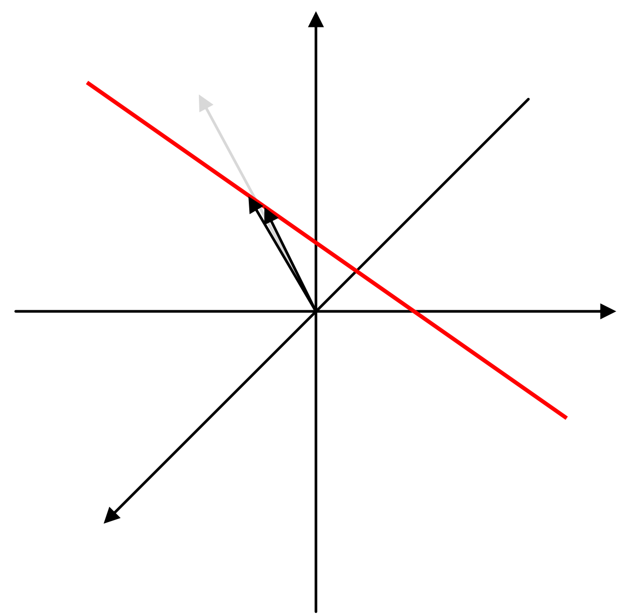
Underrum

En delmängd av ett vektorrum säges vara ett **underrum** om delmängden i sig är ett vektorrum, d.v.s. om summan av två vektorer i delmängden också tillhör delmängden, och om en skalär gånger en vektor i delmängden också alltid ligger i delmängden.

En linje eller ett plan **genom origo** är alltid ett underrum av $\mathbb{R}^n$.



Linjen är ett vektorrum.



Linjen är *inte* ett vektorrum.

Skalärprodukt *

En **skalärprodukt** i ett (reellt) vektorrum är en operation som tar in två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och ger ifrån sig en skalär $(\mathbf{u}|\mathbf{v})$, så att

I.	operationen är kommutativ	$(\mathbf{u}\|\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\|\mathbf{u})$
II.	operationen distribuerar över +	$(\mathbf{u}\|\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\|\mathbf{v}) + (\mathbf{u}\|\mathbf{w})$
III.	för en skalär λ gäller	$(\mathbf{u}\|\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}\|\mathbf{v})$
IV.	icke-negativ produkt med sig själv	$(\mathbf{u}\|\mathbf{u}) \geq 0$
V.	”bara nollan ger noll”	$(\mathbf{u}\|\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Varje operation (funktion) som tar in två vektorer och ger ifrån sig en skalär och som uppfyller axiomen ovan, säges vara en skalärprodukt. I den här kursen avser vi emellertid nästan alltid den ”vanliga” skalärprodukten:

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \left(\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

I planet och rummet kan man visa att

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\alpha\,, \qquad \alpha = \angle(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

Skalärprodukt

*

Ett vektorrum med en skalärprodukt kallas för ett **euklidiskt rum**.

(D.v.s.: om man bestämmer sig för att arbeta med en viss skalärprodukt i ett visst vektorrum, så har man ”tillstånd” att kalla vektorrummet för ett euklidiskt rum. Om man skall ange ett euklidiskt rum, måste man alltså ange vilken skalärprodukt som används.)

I planet och rummet vet vi att längden av en vektor

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}.$$

Detta betyder att vi i alla euklidiska rum kan tala om **längder** (varje euklidiskt rum är ett **normerat** rum), även om längden inte har någon geometrisk tolkning. Dessutom kan längden av en vektor i ett vektorrum variera beroende på vilken skalärprodukt man använder!

I ett euklidiskt rum kan man också tala om **avstånd** (varje euklidiskt rum är ett **metriskt** rum). Avståndet mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ definieras då (lämpligen) som $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$.

Vinklar mellan vektorer

Med hjälp av skalärprodukten är det mycket enkelt att beräkna vinkeln mellan två vektorer.

Exempel:

$$\mathbf{u} = (1, 3, 0)$$
$$\mathbf{v} = (-2, 1, 2)$$

Skalärprodukten är å ena sidan

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$$

och å andra sidan

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta = \sqrt{10} \cdot 3 \cdot \cos\theta.$$

Därför är

$$\theta = \arccos \frac{1}{3\sqrt{10}} \approx 83{,}9°.$$

Linjer

En linje i $\mathbb{R}^n$ (t.ex. $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$) kan anges på parameterform. Exempel: En linje i rummet som går genom punkten $(1, -1, 2)$ och har riktningsvektorn $(1, 1, 1)$ kan skrivas

$$L:\quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta skall tolkas som att L är **värdemängden** till **funktionen** i högerledet, d.v.s. mängden av alla punkter som kan erhållas för något t. När t varierar flyttar vi oss längs linjen.

Linjer i **planet** $\mathbb{R}^2$ kan också skrivas på normalform, d.v.s. som en **ekvation** i planets koordinater, som till exempel

$$2x + 4y = 3.$$

Detta tolkas som att linjen är mängden av alla punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller ekvationen. Linjens normal är $(2, 4)$ och linjen går *inte* genom origo, eftersom det inte står noll i högerledet (så $(x, y) = (0, 0)$ löser inte ekvationen).

Plan

Ett plan i $\mathbb{R}^n$ (t.ex. $\mathbb{R}^3$) kan anges på parameterform. Exempel: Ett plan i rummet som går genom punkten $(3, 5, 1)$ och spänns upp av vektorerna $(1, 1, 1)$ och $(1, 0, 2)$ heter

$$\Pi: \quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

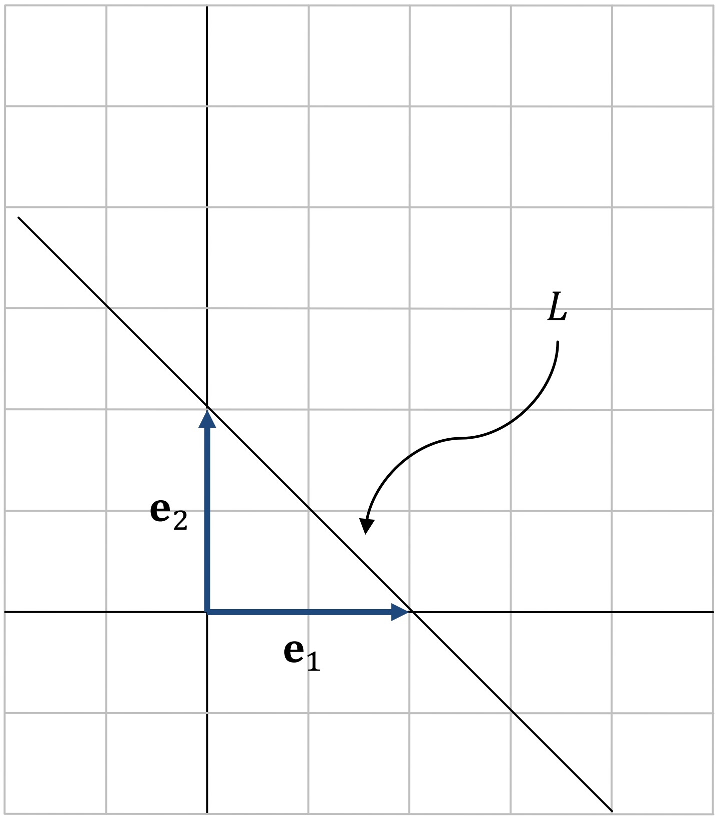
Detta skall tolkas som att Π är **värdemängden** till **funktionen** i högerledet, d.v.s. mängden av alla punkter som kan erhållas för något par av s och t. När s och t varierar sveper vi över planet.

Plan i **rummet** $\mathbb{R}^3$ kan också skrivas på normalform, d.v.s. som en **ekvation** i rummets koordinater, som till exempel

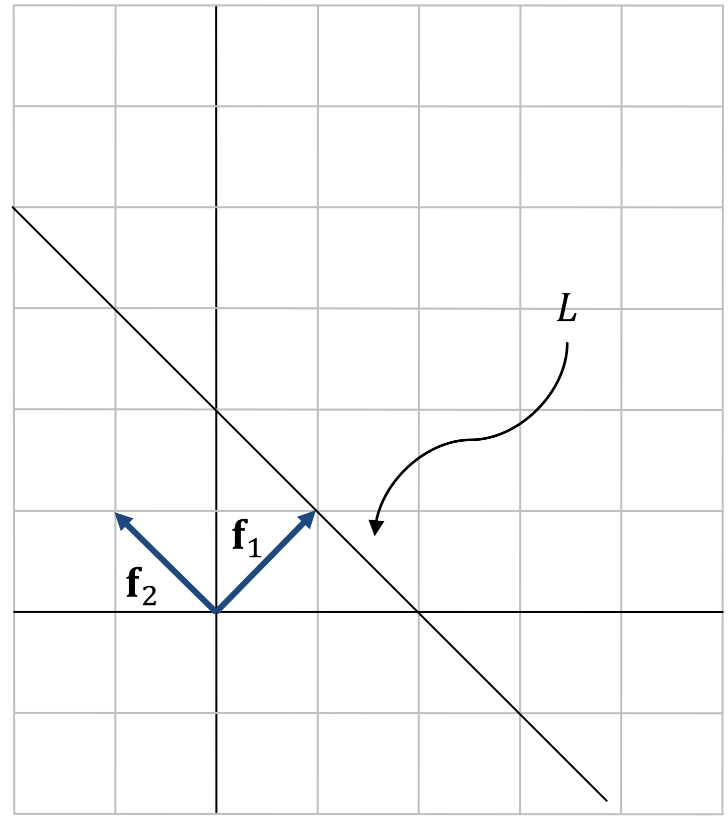
$$2x + 4y + z = 3.$$

Planets normal är $(2, 4, 1)$ och det går *inte* genom origo, eftersom det inte står noll i högerledet (så $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ löser inte ekvationen).

Baser och koordinatsystem

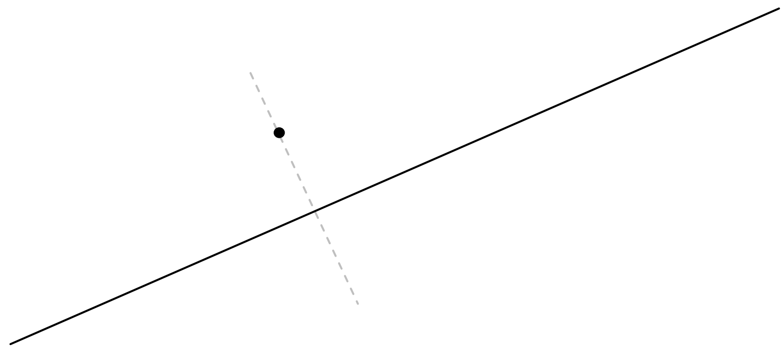


$L\colon\ \ x_1 + x_2 = 1$



$L\colon\ \ y_1 = 1$

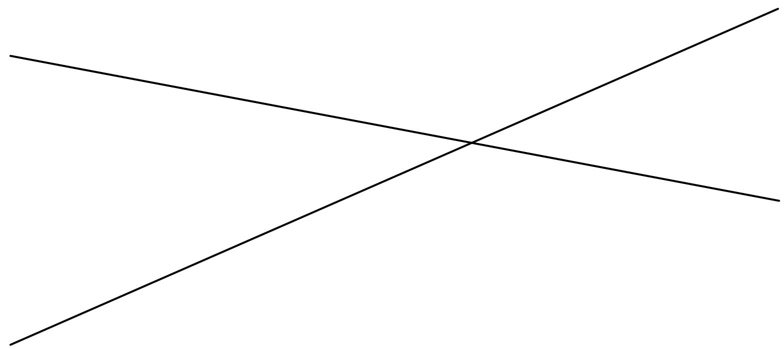
Avstånd mellan punkt och linje i planet.
Ortogonal projektion, spegling.



- Bestäm linjens ekvation, och sedan normalens riktning. Det är lätt, t.ex. eftersom $k_1 k_2 = -1$.

- Bestäm på parameterform den räta linje som går genom punkten, och har linjens normal som riktning. Det är lätt, ty vi har ju linjens riktningsvektor. Och en punkt och en riktningsvektor ger ju en linje på parameterform.

Skärningspunkt mellan två linjer *i planet*



- Bestäm ekvationerna för linjerna på normalform.

- En skärningspunkt är ju en punkt som ligger på båda linjerna, d.v.s. som uppfyller båda ekvationerna samtidigt. Således bestämmes punkten genom att lösa det ekvationssystem som de två linjernas ekvationer ger upphov till tillsammans.

Skärningspunkter (-linje) mellan två plan i rummet

- Ett plan i rummet kan beskrivas med sin normalekvation. Således löses det här problemet på exakt samma sätt.

Skärningspunkt mellan två linjer *i rummet*

En linje i rummet har ingen normalekvation, så här måste vi använda parameterbeskrivningen av linjerna i stället.

$$L_1:\quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2:\quad \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3 + t = 0 + s \\ 5 + t = 2 + 2s \\ 1 + t = 3 + 0s \end{cases}$$

Tänk på att använda två olika variabler för respektive parameter! (Två flygplansspår som korsar varandra på den vackra blåa himlen behöver inte betyda att planen kolliderat, d.v.s. att de inte bara varit på samma plats, utan också vid samma tidpunkt.)

Linjära avbildningar

En funktion (mellan två vektorrum) som uppfyller villkoren

$$F(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$$
$$F(\lambda\mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u})$$

kallas **linjär**.

Man kan visa att varje linjär avbildning mellan två vektorrum kan skrivas som en matris-produkt, d.v.s. att det alltid finns en matris A så att

$$F(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{e}}AX$$

där $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}X$, d.v.s. X är koordinatmatrisen för $\mathbf{u}$.

Kolonnerna i avbildningsmatrisen A är bilderna av basvektorerna, d.v.s.

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ F(\mathbf{e}_1) & \cdots & F(\mathbf{e}_n) \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Exempel på linjära avbildningar

I planet: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

I rummet: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Från rummet till planet: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

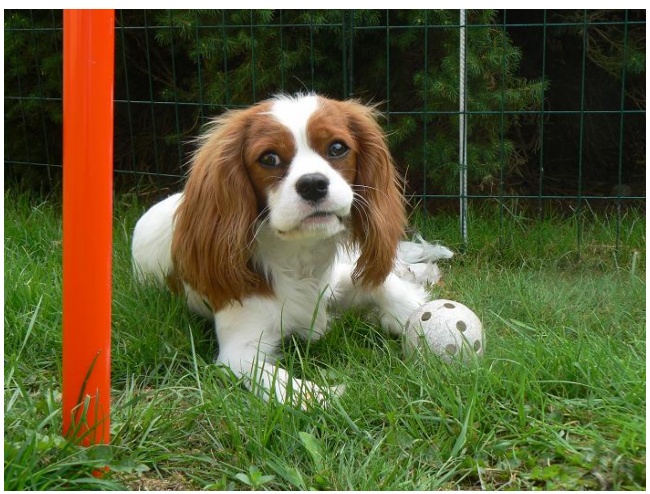
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

I den här kursen studerar vi främst avbildningar där ursprungsrum och målrum är det-samma, d.v.s. så kallade **endomorfismer**. Dessa beskrivs förstås av kvadratiska matriser.

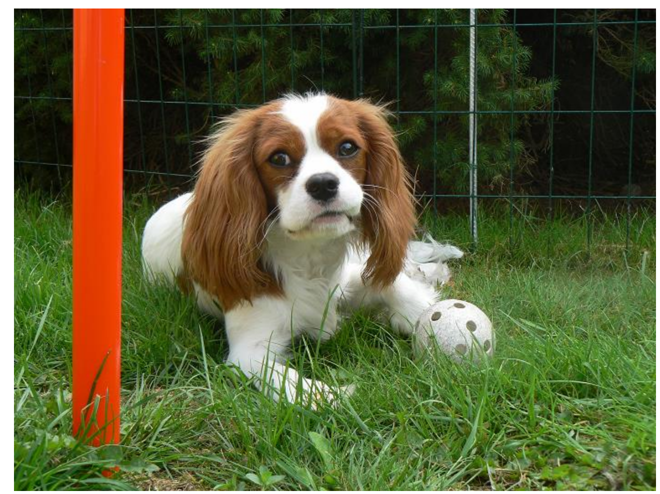
Exempel på linjära avbildningar i planet

- Identitetsavbildningen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

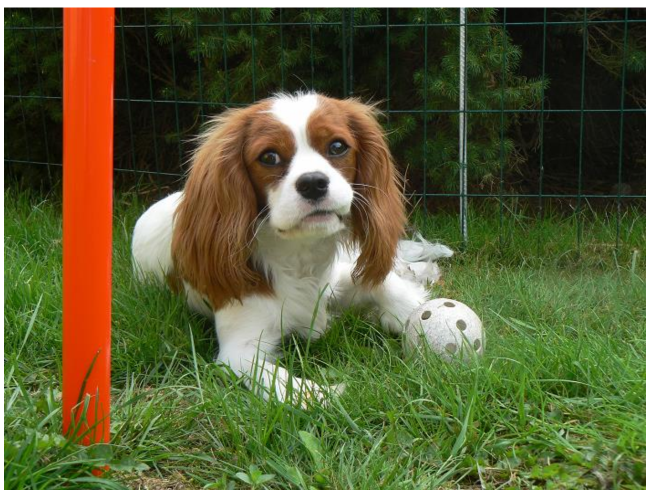


$$\xrightarrow{A}$$



- Skalning:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

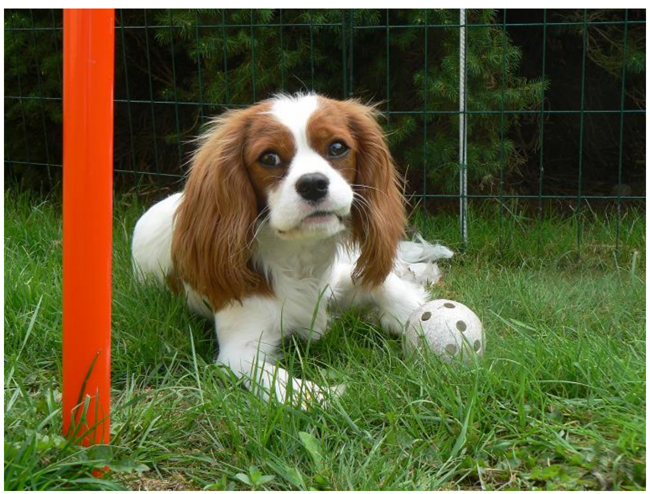


$$\xrightarrow{A}$$

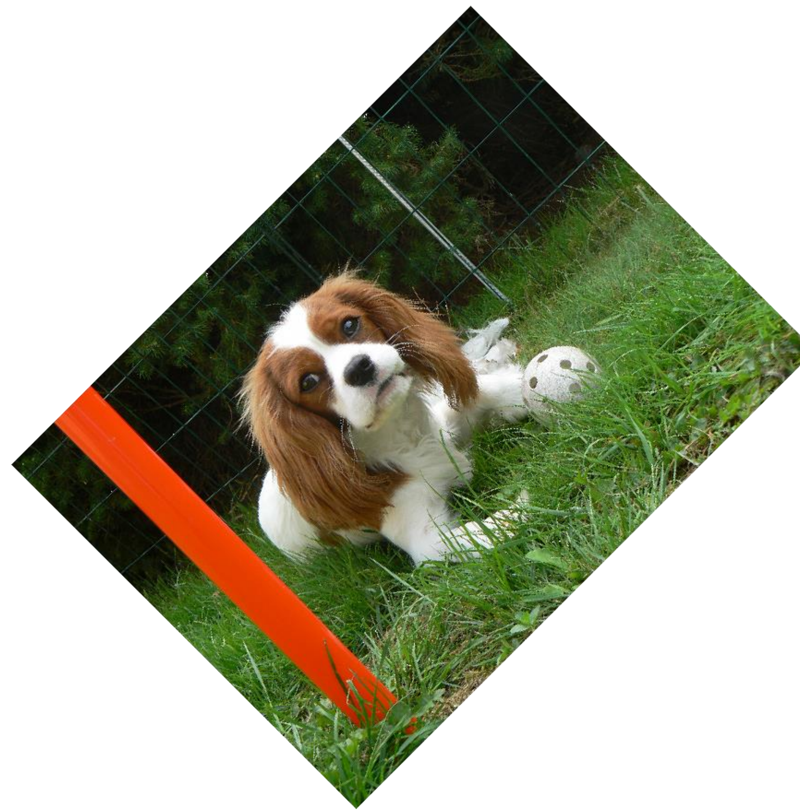
$$a = 1$$
$$b = 2$$

- Rotation:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

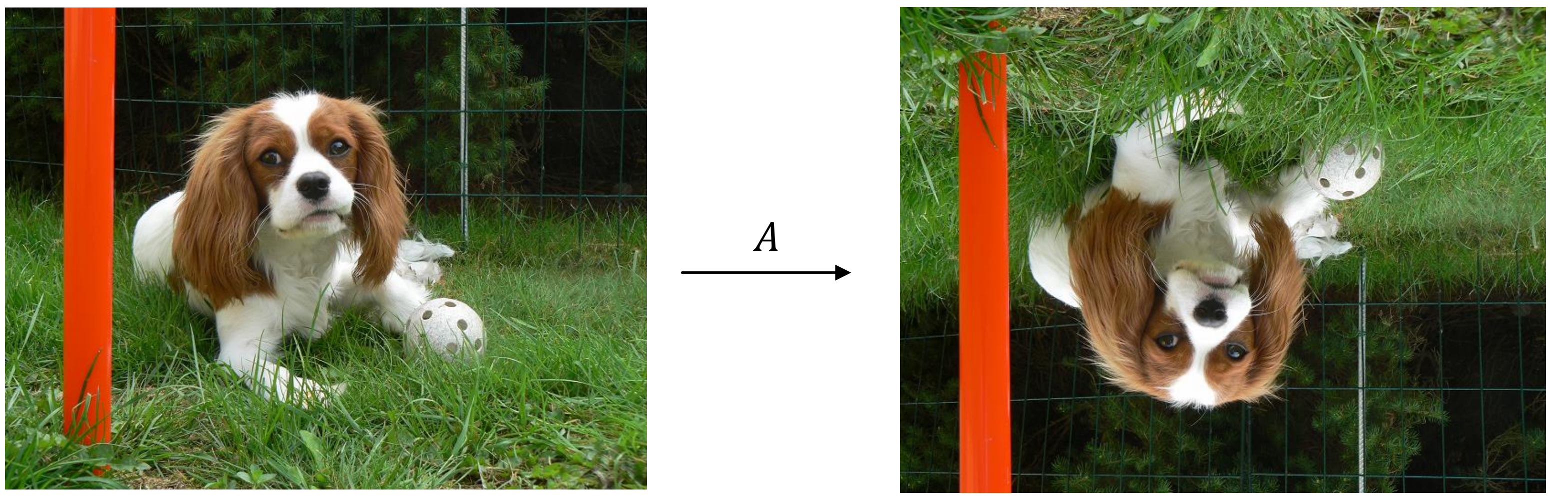


$$\xrightarrow[\theta = 45^\circ]{A}$$



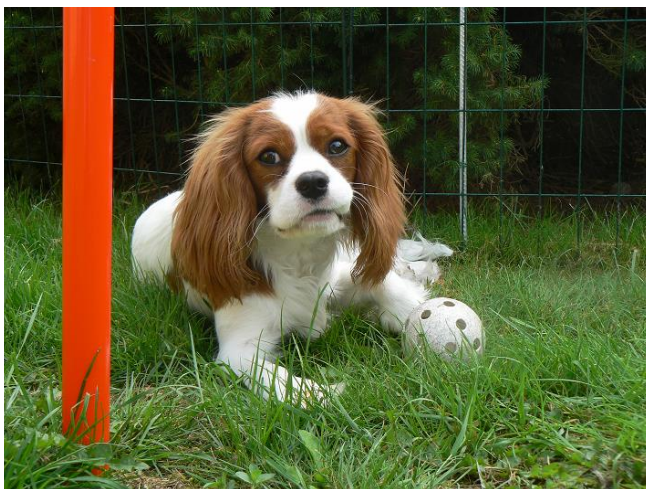
- Spegling i x-axeln:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



- Skjuvning:

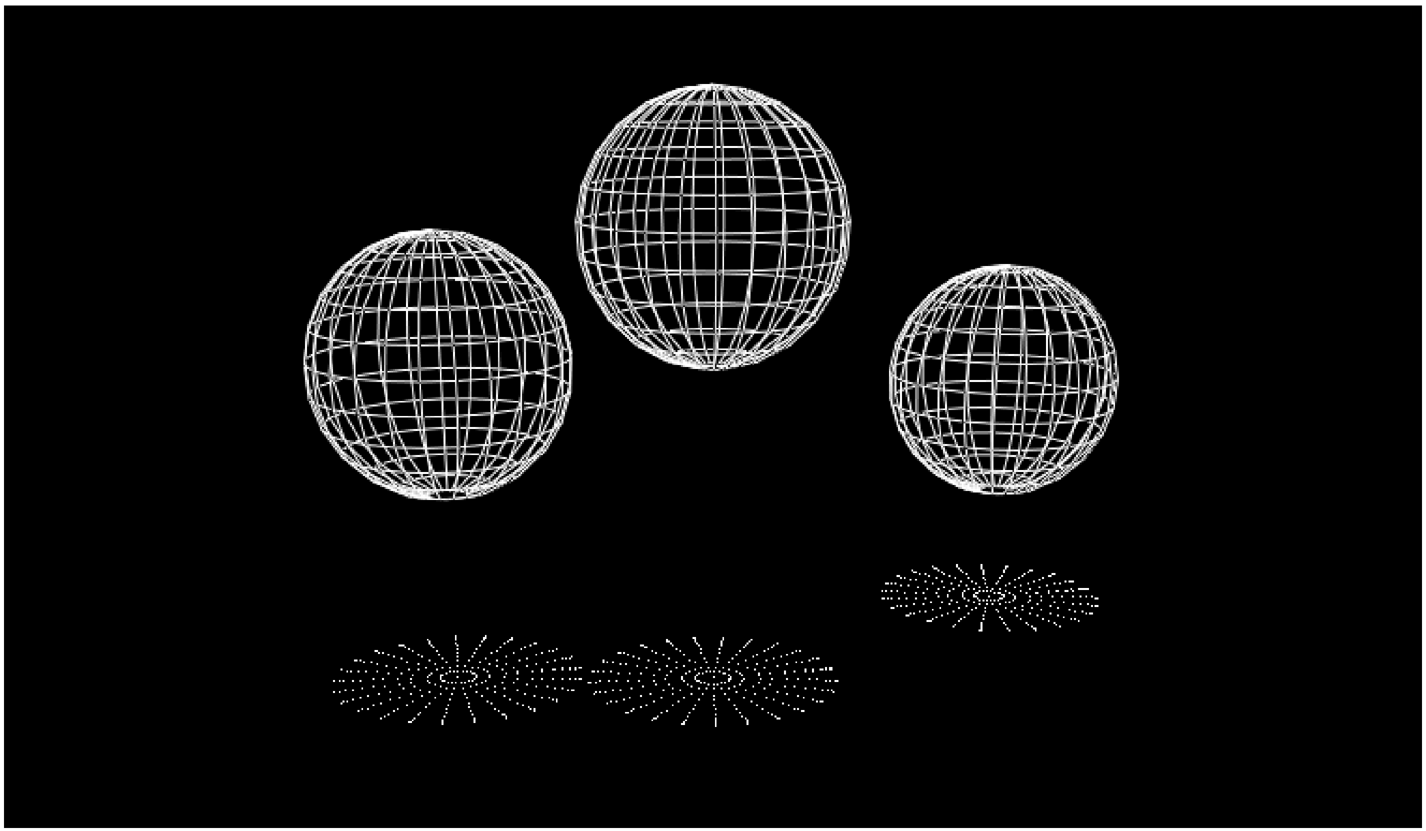
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow[a\,=\,0.3]{A}$$

- Projektion (notera att en projektion alltid är **idempotent**, d.v.s. $A^2 = A$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Determinanten

Vad är determinanten av avbildningarna på de föregående sidorna? Vad är areaförstorningen i respektive fall?

Basbyte

Från tidigare vet vi att det givet standardbasen $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n)$ och en annan bas $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{f}_n)$ finns en basbytesmatris T, vars kolonner är $\mathbf{f}$-vektorernas koordinater i standardbasen, d.v.s.

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T.$$

Vi kommer ihåg att det för en **vektor** $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}X_{\underline{\mathbf{e}}} = \underline{\mathbf{f}}X_{\underline{\mathbf{f}}}$ gäller att

$$\boxed{X_{\underline{\mathbf{e}}} = TX_{\underline{\mathbf{f}}}.}$$

För en **linjär avbildning** med matrisen $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ i standardbasen, gäller att avbildningens matris $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ i den nya basen uppfyller

$$\boxed{A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}A_{\underline{\mathbf{e}}}T.}$$

Egenvärden och egenvektorer

Om $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ är en nollskild vektor sådan att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, d.v.s. om bilden av $\mathbf{v}$ är parallell med $\mathbf{v}$, så säges $\mathbf{v}$ vara en egenvektor till A med egenvärdet λ. (Egentligen borde vi skriva $AX = \lambda X$ där X är koordinatmatrisen till vektorn $\mathbf{v}$, d.v.s. $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}X$ (varför?).)

Exempel: För ortogonalprojektionen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

på xy-planet (d.v.s. planet $z = 0$) är

- varje vektor i planet $z = 0$ en egenvektor med egenvärde 1 och
- varje vektor på linjen $[(0,0,1)]$ en egenvektor med egenvärde 0.

Hur man bestämmer egenvärden

- Lös ekvationen $|A - \lambda E| = 0$ för att finna egenvärdena.
- Lös ekvationen $(A - \lambda_i)X = 0$ för att finna **egenrummet** som hör till egenvärdet λ_i.

Spektralteori

Låt $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ vara [matrisen för] en endomorfism (linjär avbildning inom ett vektorrum). Om vi byter till en bas av egenvektorer till $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ så kommer matrisen $A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}A_{\underline{\mathbf{e}}}T$ i egenbasen att vara diagonal.

Spektralsatsen (i det reella fallet)

Det finns en *ortonormerad* egenbas till matrisen A om och endast om A är **symmetrisk**.

Egenvärden och egenvektorer. Exempel.

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena ges av

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 6) = 0$$

så $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 6.$

Egenrummet till λ_i ges av

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda_i & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi erhåller egenrummen

$$E_0 = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \qquad E_{-2} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \qquad E_6 = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Egenvärden och egenvektorer. Exempel (fortsättning).

För att välja en egenbas, tag en vektor i respektive egenrum, t.ex.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

I den nya basen heter avbildningsmatrisen

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

Eftersom matrisen är symmetrisk, är det inte en slump att egenvektorer från olika egenrum är ortogonala mot varandra.

Tillämpningar av egenvärdesteorin

- Lösning av system av differentialekvationer, genom att ”koppla isär” ekvationerna med hjälp av ett basbyte.
- Lösning av system av differensekvationer, genom att ”koppla isär” ekvationerna med hjälp av ett basbyte.
- Studie av kurvor och ytor på formen $Q(\mathbf{x}) = c$ där $Q(\mathbf{x})$ är en kvadratisk form. Ett basbyte gör så att $Q(\mathbf{x})$ blir enkel, och vi kan erhålla kurvan eller ytan på dess standardform.
- Egenvektorer och egenvärden är ohyggligt viktiga i nästan alla delar av matematiken och fysiken. Inom fysiken förekommer teorin inte minst inom klassisk mekanik och inom kvantmekaniken.

Hur man beräknar potenser av kvadratiska matriser

Om matrisen råkar vara diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^n & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^n \end{pmatrix}$$

Om matrisen *inte* råkar vara diagonal

Vi **hoppas** att det finns en egenbas till A. Låt T vara basbytesmatrisen och D vara (den diagonala) matrisen i egenbasen. Då är

$$D = T^{-1}AT$$

så att

$$A = TDT^{-1}$$

och

$$A^n = \underbrace{TD\overbrace{T^{-1} \cdot T}^{E}DT^{-1} \cdot \cdots \cdot TDT^{-1}}_{n \text{ faktorer}} = TD^nT^{-1}.$$