

Integrationsexempel

Beräkna

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

Vi kan lösa den här uppgiften med det trigonometriska standardvariabelbytet

$$t = \tan \frac{x}{2}.$$

Vi noterar då först att

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos 2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \sin^2 \frac{x}{2} / \cos^2 \frac{x}{2}}{1 + \sin^2 \frac{x}{2} / \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Sedan finner vi

$$dt = \frac{dt}{dx} dx = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx$$

så att

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Då är det bara att utföra variabelbytet:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \left(\frac{2dt}{1+t^2}\right) / \left(\frac{2}{1+t^2}\right) = \int \left(\frac{2dt}{1+t^2}\right) \cdot \left(\frac{1+t^2}{2}\right) = \int dt = t + C \\ &= \tan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$