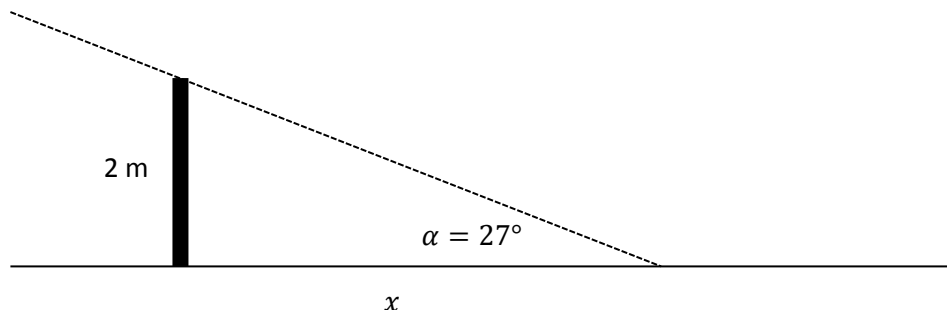


Uppgift A4.13

Solen står 27° över horisonten och sjunker med hastigheten $7.0^\circ/\text{h}$. Hur snabbt växer skuggan av en 2.0 meter hög stolpe?



Vi har

$$\tan \alpha = \frac{2 \text{ m}}{x} \Rightarrow x(\alpha) = \frac{2 \text{ m}}{\tan \alpha}$$

och vi söker

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2 \text{ m}}{\tan^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2 \text{ m}}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

Med $\alpha = 27^\circ$ och $d\alpha/dt = -7.0^\circ/\text{h}$ erhålles

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2 \text{ m}}{\sin^2 27^\circ} \cdot (-7.0^\circ/\text{h}).$$

Eftersom $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ radianer¹ erhåller vi alltså

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2 \text{ m}}{\sin^2 \frac{27\pi}{180}} \cdot \left(-\frac{7.0\pi}{180} \text{ rad/h}\right) = 1.19 \text{ m/h}.$$

Eftersom

$$1 \text{ h} = 60 \text{ minuter}$$

är

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1.19}{60}\right) \text{ m/min} = 0.0198 \text{ m/min} = 1.98 \text{ cm/min} \approx 2.0 \text{ cm/min}.$$

¹ Själv brukar jag betrakta gradtecknet $^\circ$ som en postfixoperator: $T^\circ := T \cdot \frac{\pi}{180}$ för alla $T \in \mathbb{R}$. (Jämför med den mer bekanta postfixoperatoren faktulet: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$.) Jag brukar även betrakta procenttecknet som en postfixoperator: $x\% := \frac{x}{100}$ för alla $x \in \mathbb{R}$.