

## Uppgift B3.40

### Deluppgift C

Gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n^2}$$

skall beräknas.

Vad menar vi egentligen med  $a^b$ ? Jo,  $a^b \stackrel{\text{def}}{=} e^{b \ln a}$  så i det här fallet är

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right).$$

Sätt nu  $t = \frac{1}{n}$  så att  $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$  och

$$\exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{2t}\right)}{t^2}\right) = \exp\left(\frac{\overbrace{\ln\left(1 + \left(-\frac{1}{2}t\right)\right)}^{\rightarrow -\infty}}{-\frac{1}{2t} \cdot \underbrace{-\frac{1}{2}t}_{\rightarrow 1}}\right) \rightarrow 0$$

eftersom  $e^x \rightarrow 0$  då  $x \rightarrow -\infty$ .

### Deluppgift D

Vi skall nu beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n+5}.$$

Vi noterar först att

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n+5} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^5}_{\rightarrow 1}$$

så i själva verket behöver vi bara undersöka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Vi finner då

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{2t}\right)}{t}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\overbrace{\ln\left(1 + \left(-\frac{1}{2}t\right)\right)}^{\rightarrow -\infty}}{\underbrace{-\frac{1}{2}t}_{\rightarrow 1}}\right) \rightarrow e^{-1/2}.$$