Uppgift 10.27

Vi skall härleda Maclaurinserien för $\sin x$ på två olika sätt.

Metod 1

Sedan tidigare vet vi att vi kan approximera $\sin x$ med Maclaurinpolynom. Till ordning $2n+1$ är

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Med resttermen i Lagranges form har vi alltså

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta x \, x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

för något $\theta \in [0,1]$. Men detta medför att

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta x \, x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right| = \left| \frac{\cos \theta x \, x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right| \leq \left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right|$$

för varje n, och eftersom

$$\left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right| \to 0$$

då $n \to \infty$ är det klart att

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \to \sin x$$

då $n \to \infty$. Enligt definitionen av serie har vi alltså

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

och vi har därmed funnit potensserien för sinus.

Metod 2

Notera att $y = \sin x$ är den unika lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y'' = -y, \qquad y(0) = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Genom att lösa differentialekvationen med en potensserieansats kan vi därför återigen ta fram potensserien för sinus. Ansätt så

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

så att

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n$$

och

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n.$$

Ekvationen $y''(x) = -y(x)$ kan sålunda skrivas

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

eller

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} + c_n]x^n = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots.$$

Om två potensserier är lika, måste varje koefficient vara lika. Detta ger att

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + c_n = 0$$

för varje $n \in \mathbb{N}$, d.v.s. vi erhåller rekursionsformeln

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)}.$$

Av begynnelsevillkoren ser vi att $c_0 = 0$ och $c_1 = 1$ (hur då?). Med hjälp av rekursionsformeln ser vi då att

$$c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \Rightarrow \cdots$$

d.v.s. varje jämn koefficient är noll. Samtidigt ser vi att

$$c_1 = 1 \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3} \Rightarrow c_5 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \Rightarrow c_7 = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \Rightarrow \cdots.$$

Vi har därmed funnit

$$y(x) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Samtidigt vet vi ju att den unika lösningen till differentialekvationen i fråga är $y(x) = \sin x$, så

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

som väntat.