Uppgift 7.20

Vi skall bestämma en rationell approximation till π, genom att utgå från

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Maclaurin-utveckling ger, med resttermen i Lagranges form,

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16}(1+\theta t)^{-7/2}t^3$$

för något $\theta \in [0,1]$ (som beror på t). Sålunda är, med $t = -x^2$,

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}(1-\theta x^2)^{-7/2}x^6$$

varför

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}(1-\theta x^2)^{-7/2}x^6\right) dx \approx$$
$$\approx \int_0^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4\right) dx = \left[x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5\right]_0^{1/2} = \frac{2009}{3840}$$

och det är alldeles uppenbart att den här uppgiften hade varit ypperligt lämplig i Matematikolympiaden år 2009. Det följer att

$$\pi \approx \frac{2009}{640} \, (= 3.1390625).$$

Felet är uppenbarligen (enligt ovan)

$$\left|\pi - \frac{2009}{640}\right| = \left|6\int_0^{1/2} \left(\frac{5}{16}(1-\theta x^2)^{-7/2}x^6\right) dx\right|$$

där $\theta \in [0,1]$ beror på x (fortfarande). Låt oss uppskatta felet. Det är klart att

$$\left|\pi - \frac{2009}{640}\right| = \frac{15}{8}\left|\int_0^{1/2} \frac{x^6}{(1-\theta x^2)^{7/2}} dx\right| \leq \frac{15}{8}\left|\int_0^{1/2} \frac{x^6}{(1-x^2)^{7/2}} dx\right| \leq$$
$$\leq \frac{15}{8}\left|\int_0^{1/2} \frac{x^6}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{7/2}} dx\right| = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{7/2}} \cdot \int_0^{1/2} x^6 dx =$$
$$= \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{7/2}} \cdot \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{5}{504\sqrt{3}} \leq \frac{5}{504} \leq \frac{5}{500} = 0.01$$

så felet är mindre än en hundradel.