Uppgift A6.4

Deluppgift A

Låt

$$f(x) := \int_0^x t^2 \ln(t+1)\,dt, \qquad D_f =]-1, \infty[.$$

Då är, enligt analysens huvudsats,

$$f'(x) = x^2 \ln(x+1).$$

Deluppgift B

Låt

$$f(x) := \int_x^1 \frac{t^4}{t^2+1}\,dt, \qquad D_f = \mathbb{R}.$$

Eftersom

$$f(x) = \int_x^1 \frac{t^4}{t^2+1}\,dt = -\int_1^x \frac{t^4}{t^2+1}\,dt$$

så ger analysens huvudsats att

$$f'(x) = -\frac{x^4}{x^2+1}.$$

Deluppgift C

Låt

$$f(x) := \int_0^1 e^{t^2}\,dt, \qquad D_f = \mathbb{R}.$$

Notera att högerledet är en konstant. ($\int_0^1 e^{t^2}\,dt = 1.4626\,\ldots$) Sålunda är $f(x)$ samma tal för varje x, så grafen till f är en rät linje, och det är självklart att $f'(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Deluppgift D

$$f(x) := \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt, \qquad D_f =]0, \infty[.$$

Metod 1:

Nu är

$$f(x) = \int_x^{71} \frac{e^t}{t}\,dt + \int_{71}^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt = -\int_{71}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt + \int_{71}^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$$

så analysens huvudsats ger

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[-\int_{71}^{x}\frac{e^t}{t}dt + \int_{71}^{x^2}\frac{e^t}{t}dt\right] = \\
&= -\frac{d}{dx}\left[\int_{71}^{x}\frac{e^t}{t}dt\right] + \frac{d}{dx}\left[\int_{71}^{x^2}\frac{e^t}{t}dt\right] = \\
&= -\frac{e^x}{x} + \frac{e^{x^2}}{x^2}\cdot 2x = \\
&= -\frac{e^x}{x} + \frac{2e^{x^2}}{x}
\end{aligned}$$

där vi använt kedjeregeln i den andra termen. (Om vi sätter $y \coloneqq x^2$ så har vi ju

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{71}^{x^2}\frac{e^t}{t}dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_{71}^{y}\frac{e^t}{t}dt\right] = \frac{d}{dy}\left[\int_{71}^{y}\frac{e^t}{t}dt\right]\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{y}\cdot 2x = \frac{e^{x^2}}{x^2}\cdot 2x.)$$

Metod 2:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{71}^{x^2}\frac{e^t}{t}dt\right] = \begin{bmatrix} s \coloneqq \sqrt{t} \\ s^2 = t \\ 2sds = dt \end{bmatrix} = \frac{d}{dx}\left[\int_{\sqrt{71}}^{x}\frac{e^{s^2}}{s^2}2sds\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_{\sqrt{71}}^{x}\frac{2e^{s^2}}{s}ds\right] = \frac{2e^{x^2}}{x}.$$