Uppgift A7.19

Vi skall bestämma ett polynom som approximerar e^{-x^2} för $x \in [-1, 1]$ så att felets absolutbelopp blir mindre än 0.01 för alla dessa x.

De polynom som approximerar e^{-x^2} bäst är förstås Maclaurin-polynomen. Ju fler termer vi tar med, desto mindre blir felet för samtliga x. Vi drar till med en approximation till och med ordning 7. För t nära noll har vi utvecklingen

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + e^{\theta t}\frac{t^5}{5!}$$

för något $\theta \in [0, 1]$. Således är

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - e^{-\theta x^2}\frac{x^{10}}{5!}. \qquad (*)$$

Om vi sätter

$$p(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$$

så har vi alltså vår approximation

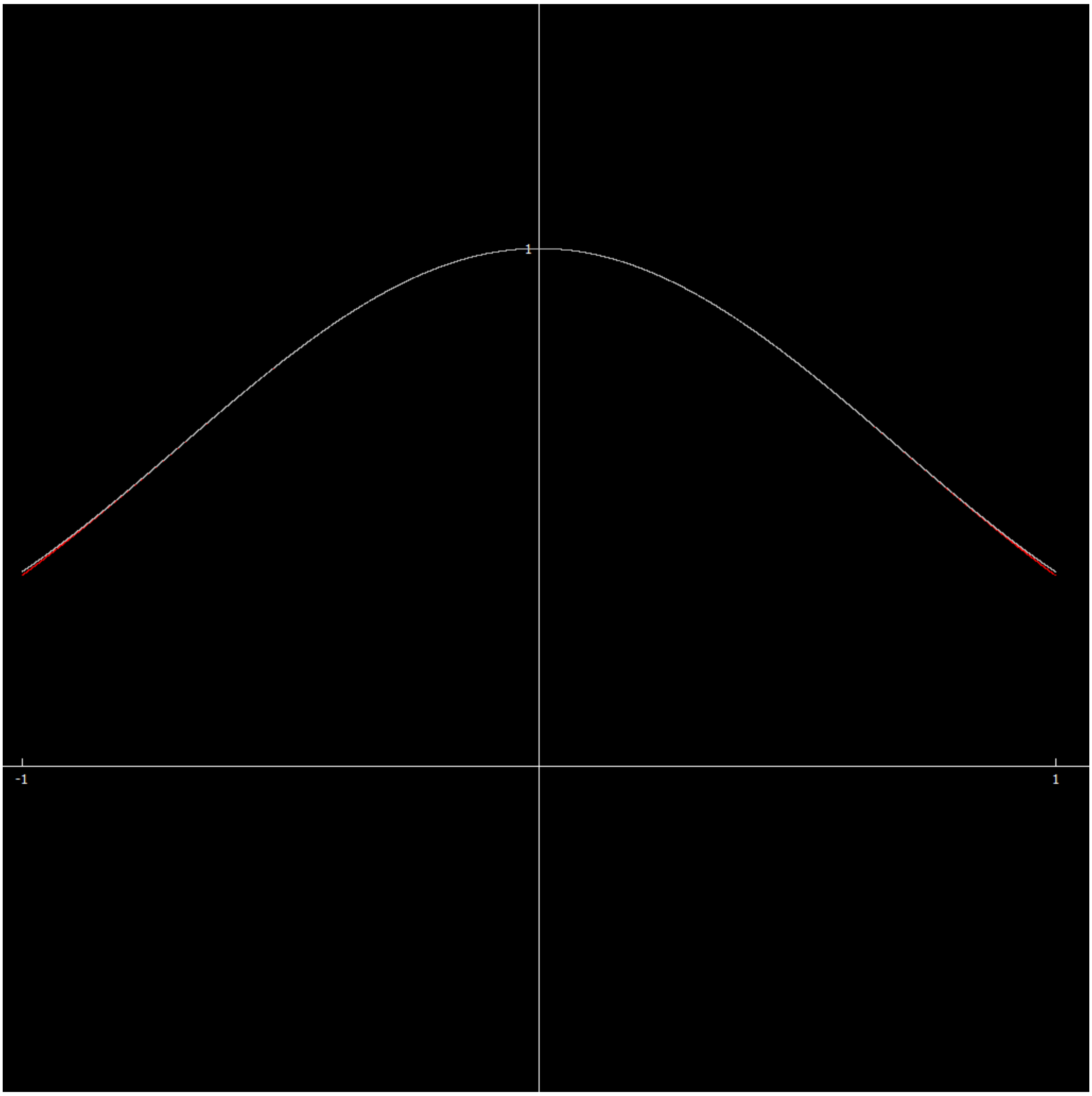
$$e^{-x^2} \approx p(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$$

och felets belopp ges av (*) till

$$\left|e^{-x^2} - p(x)\right| = \left|-e^{-\theta x^2}\frac{x^{10}}{5!}\right| = \left|e^{-\theta x^2}\frac{x^{10}}{5!}\right| \leq \left|\frac{x^{10}}{5!}\right| \leq \left|\frac{1}{5!}\right| = \frac{1}{120} < 0.01$$

för alla $x \in [-1, 1]$ eftersom $e^{-\theta x^2}$ aldrig kan bli större än 1 för dessa x. (x^2 varierar ju mellan 0 och 1, så $e^{-\theta x^2}$ varierar mellan $e^0 = 1$ och $e^{-1} = 1/e$.)

I grafen nedan visas $y = e^{-x^2}$ (rött) och $y = p(x)$ (silver) i samma koordinatsystem.


1
-1
1