Uppgift A8.15c

Vi skall hitta den lösningskurva till differentialekvationen

$$y' = \frac{1+y}{x^2+x}$$

som går igenom punkten $(1, -2)$.

Lösning:

Differentialekvationen är separabel eftersom

$$y' = \frac{1+y}{x^2+x} \Leftrightarrow \frac{y'}{1+y} = \frac{1}{x^2+x}.$$

Den senare ekvationen lyder (ja, här har jag smygintegrerat högerledet!)

$$\frac{d}{dx}\ln|1+y| = \frac{d}{dx}(\ln|x| - \ln|x+1|).$$

Om två funktioner har samma derivata (=deras grafer har samma lutning överallt) så måste de vara lika sånär som på en konstant (=vertikal förskjutning):

$$\ln|1+y| = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

Eftersom vi söker en lösningskurva som går igenom punkten $(1, -2)$ så är $x \approx 1$, $x+1 \approx 2$ och $1+y \approx -1$. Alltså är $|1+y| = -(1+y)$ medan de två andra beloppstecknen är verkningslösa:

$$\ln\big(-(1+y)\big) = \ln x - \ln(x+1) + C.$$

Notera att vi nu kräver att $x > 0$. [Det är OK, eftersom vi söker en lösning i någon omgivning av $x = 1$.] Sätter vi in $(x, y) = (1, -2)$ erhåller vi $0 = 0 - \ln 2 + C$, d.v.s. $C = \ln 2$. Vi löser nu ut $y(x)$:

$$\ln\big(-(1+y)\big) = \ln x - \ln(x+1) + \ln 2 \Leftrightarrow \ln(-1-y) = \ln\frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow -1-y = \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{2x}{x+1} - 1 = -\frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = -\frac{3x+1}{x+1}.$$

Vi noterar att lösningen, som vi ju sökt kring $x = 1$, endast är giltig för $x > 0$.

Uppgift A8.15d

Vi söker nu den lösningskurva som går igenom punkten $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Precis som förut landar vi till en början i

$$\ln|1+y| = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

Nu är $x \approx -\frac{1}{2}$, $x+1 \approx \frac{1}{2}$ och $1+y \approx 1$ så $|x| = -x$, $|x+1| = x+1$ och $|1+y| = 1+y$:

$$\ln(1+y) = \ln(-x) - \ln(x+1) + C.$$

Notera att vi nu kräver att $x < 0$ och $x + 1 > 0$. [Det är OK eftersom vi söker en lösning i någon omgivning av $x = -\frac{1}{2}$.] Sätter vi in $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ erhåller vi $0 = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} + C$, d.v.s. $C = 0$. Vi kan nu lösa ut $y(x)$:

$$\ln(1+y) = \ln(-x) - \ln(x+1) \Leftrightarrow \ln(1+y) = \ln\left(-\frac{x}{x+1}\right) \Leftrightarrow 1 + y = -\frac{x}{x+1} \Leftrightarrow y =$$
$$= -\frac{x}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = -\frac{2x+1}{x+1}.$$

Vi noterar att lösningen, som vi sökt i närheten av $x \approx -\frac{1}{2}$, endast är giltig för $x \in \left]-1,0\right[$.