Uppgift A8.17

Vi skall lösa differentialekvationen

$$e^y(1+y')=1, \qquad y(0)=\ln 3.$$

Lösning: Ekvationen är separabel, eftersom

$$e^y(1+y')=1 \Leftrightarrow 1+y'=e^{-y} \Leftrightarrow y'=e^{-y}-1 \Leftrightarrow \frac{y'}{e^{-y}-1}=1.$$

Nu är

$$\int \frac{1}{e^{-y}-1}dy = \begin{bmatrix} t \coloneqq e^y \\ y=\ln t \\ dy=\dfrac{dt}{t} \end{bmatrix} = \int \frac{dt/t}{1/t-1} = \int \frac{dt}{1-t} = -\ln|1-t| = -\ln|1-e^y|.$$

Eftersom vi söker en lösning där $y \approx \ln 3$ så är $1-e^y \approx -2$ så att $\ln|1-e^y| = \ln\big(-(1-e^y)\big) = \ln(e^y-1)$. Vi kräver alltså att $e^y > 1$. Vår separabla differentialekvation kan sålunda skrivas

$$\frac{d}{dx} - \ln(e^y-1) = \frac{d}{dx}x.$$

Om två funktioner har samma derivata (=deras grafer har samma lutning överallt) så måste de vara lika sånär som på en konstant (=en vertikal förskjutning):

$$-\ln(e^y-1)=x+C.$$

Om vi kräver att $y(0)=\ln 3$ så trillar det ut att $C=-\ln 2$. Vi kan nu lösa ut $y(x)$:

$$\ln(e^y-1)=-x+\ln 2 \Leftrightarrow e^y-1=e^{-x+\ln 2}=e^{-x}e^{\ln 2}=2e^{-x} \Leftrightarrow e^y=2e^{-x}+1 \Leftrightarrow y = \\ = \ln(2e^{-x}+1).$$

[Eftersom vi kräver att $e^y > 1$ så måste $2e^{-x}+1>1$, d.v.s. $2e^{-x}>0$, men det är ju alltid sant!]