# Uppgift B 10.23

## Deluppgift A

Vi skall räkna ut summan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k.$$

Vi börjar med något vi vet (vad skulle vi annars börja med?!), nämligen den geometriska serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad \forall x \in ]-1,1[.$$

Termvis derivering ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Multiplikation med $x$ ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

och termvis derivering (igen) ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

Multiplikation med $x$ (igen) ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

vilket är den sökta summan.

## Deluppgift B

Vi skall räkna ut summan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}.$$

Vi börjar med något vi vet, nämligen den geometriska seriens summa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad \forall x \in \left]-1,1\right[.$$

Integration ger

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x)$$

och *omnumrering* av summans termer ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

Integration (igen) ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = x - (x-1)\ln(1-x).$$

Detta gäller för varje $x \in \left]-1,1\right[$. Om vi dessutom antar att $x \neq 0$ så ger division med $x$ att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)} = 1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln(1-x).$$

Å andra sidan, om $x = 0$, ser vi direkt att den ursprungliga summan har värdet $0$.

*Svar*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)} = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln(1-x) & \text{om } x \in \left]-1,1\right[ \setminus \{0\} \\ 0 & \text{om } x = 0. \end{cases}$$