

Uppgift B 10.42

Räkna ut följande summa:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Lösning: Vi börjar med något vi vet (vad skulle vi annars börja med?!), nämligen den geometriska seriens summa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Derivering ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

och multiplikation med x ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Denna ekvation gäller för varje $x \in]-1, 1[$. Speciellt erhåller vi för $x = \frac{1}{2}$ likheten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$