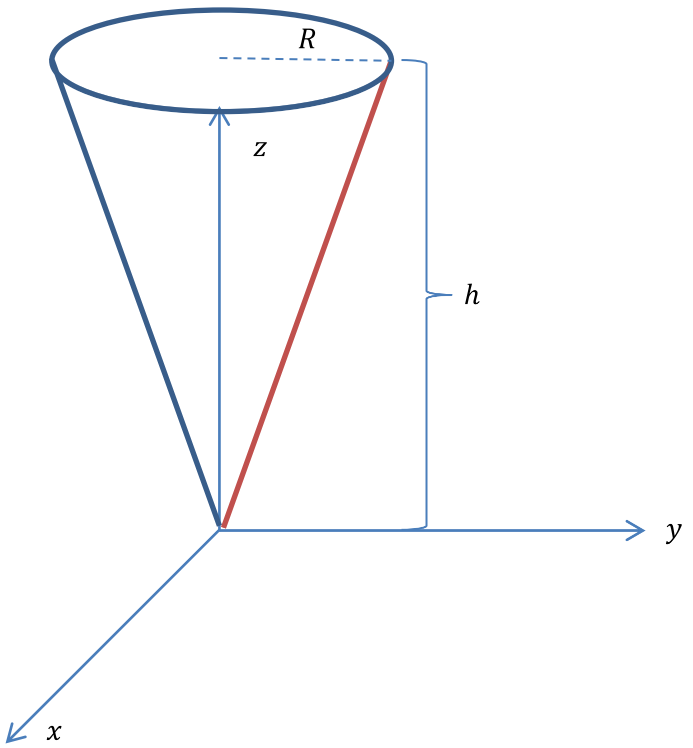
Uppgift B 7.12

Vi skall beräkna volymen av en (rak cirkulär) kon med bottenradie $R > 0$ och höjd $h > 0$.

Lösning: Lägg konen längs z-axeln med spetsen i origo, se bild.



Dela upp konen längs z-axeln i små diskar med höjd dz. En sådan disk vid höjd z har volymen

$$dV = A(z)dz$$

där $A(z)$ är konens tvärsnittsarea vid höjden z. Eftersom konens högra kantlinje (den röda!) heter $z = \frac{h}{R}y$ (varför?) är

$$A(z) = y(z)^2\pi = \left(\frac{Rz}{h}\right)^2 \pi = \frac{R^2z^2\pi}{h^2}.$$

Sålunda är

$$dV = \frac{R^2z^2\pi}{h^2}dz$$

och hela konens volym får vi genom att summera dessa små diskvolymer och sedan låta indelningen bli finare (och diskarna mindre). Riemannsumman blir då en integral:

$$V = \int dV = \int_0^h \frac{R^2z^2\pi}{h^2}dz = \left[\frac{R^2z^3\pi}{3h^2}\right]_{z=0}^h = \frac{R^2h^3\pi}{3h^2} = \frac{R^2h\pi}{3},$$

d.v.s. en tredjedel av volymen för en (rät cirkulär) *cylinder* med samma radie och höjd, vilket vi minns från högstadiet.

Vi kan också beräkna volymen genom att integrera kring y-axeln. Dela upp y-axeln från 0 till R i småbitar med längd dy vardera. Detta ger en indelning av konen i små tunna ”rör”. Röret som ligger över y har volymen

$$dV = (h - z) \cdot 2\pi y \cdot dy = \left(h - \frac{h}{R}y\right) \cdot 2\pi y \cdot dy = 2\pi h \left(1 - \frac{y}{R}\right) y dy$$

så att konens volym är

$$V = \int dV = \int_0^R 2\pi h \left(1 - \frac{y}{R}\right) y dy = \int_0^R \left(2\pi h y - \frac{2\pi h}{R} y^2\right) dy = \left[\pi h y^2 - \frac{2\pi h}{3R} y^3\right]_{y=0}^R =$$
$$= \pi h R^2 - \frac{2\pi h}{3R} R^3 = \frac{\pi h R^2}{3}$$

återigen.