Uppgift B7.25

Vi skall bestämma arean av den yta som uppkommer då kurvan

$$y = x^3, \qquad x \in [0, 1]$$

roteras ett varv kring x-axeln. Rita en bild. Vi tänker oss att vi delar upp intervallet $[0, 1]$ i små delar av längd dx vardera. Över varje sådan del är kurvans längd

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + 9x^4}dx.$$

Denna lilla kurvbit kommer att roteras kring x-axeln en sträcka $2\pi y = 2\pi x^3$, så att den lilla remsa vi erhåller har arean

$$dA = 2\pi x^3 ds = 2\pi x^3\sqrt{1 + 9x^4}dx.$$

Hela rotationsarean blir därmed

$$A = \int_0^1 dA = \int_0^1 2\pi x^3\sqrt{1 + 9x^4}dx = \left[\frac{\pi}{27}(1 + 9x^4)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{27}\left(10^{3/2} - 1\right).$$

Integrationen här är enkel, eftersom x^3 i princip är den inre derivatan av $\sqrt{1 + 9x^4}$. Och $1 + 9x^4$ upphöjt till $1/2$ måste ju ha varit $1 + 9x^4$ upphöjt till $3/2$ före deriveringen. [Notera att $10^{3/2} = 10^{1+1/2} = 10\sqrt{10}$ så vi får samma sak som facit.]