Uppgift B7.26

Vi skall bestämma arean av den yta som uppkommer då kurvan

$$y = 2\sqrt{x}, \qquad x \in [0, 1]$$

roteras ett varv kring y-axeln.

Rita en bild. Tänk dig att vi delar in intervallet $[0, 1]$ i små delar, vardera med längd dx. Kurvans längd över ett sådant litet intervall är

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx.$$

En sådan liten kurvbit kommer att rotera en sträcka $2\pi x$ och då ge upphov till en liten remsa med arean

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx$$

varvid den totala arean blir

$$A = \int_0^1 dA = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx = \int_0^1 2\pi\sqrt{x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x^2 + x}dx =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}dx = \begin{bmatrix} t = x + \frac{1}{2} \\ dt = dx \end{bmatrix} = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}dt.$$

Nu använder vi standardvariabelbytet på sidan 271 i Forsling (sista raden):

$$A = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}dt = \begin{bmatrix} s = t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \\ s - t = \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} \\ s^2 - 2st + t^2 = t^2 - \frac{1}{4} \\ s^2 - 2st = -\frac{1}{4} \\ t = \frac{s}{2} + \frac{1}{8s} \\ dt = \frac{1}{2}ds - \frac{1}{8s^2}ds \end{bmatrix} = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}+\sqrt{2}} (s - t)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8s^2}\right)ds =$$

$$= 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}+\sqrt{2}} \left(s - \left(\frac{s}{2} + \frac{1}{8s}\right)\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8s^2}\right)ds = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}+\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4}s - \frac{1}{8s} + \frac{1}{64s^3}\right)ds =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(6\sqrt{2} - \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right).$$