

### Uppgift B7.30

Vi skall bestämma masscentrum hos ett homogent halvklot med radien  $R > 0$ . Inför ett koordinatsystem så att halvklotet är  $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ . Det är självklart att masscentrets  $x$ - och  $y$ -koordinat är 0.  $z$ -koordinaten är inget annat än medelvärdet av skalärfältet  $f(x, y, z) = z$  på  $D$ , d.v.s.

$$\hat{z} = \frac{\iiint_D z dV}{\iiint_D dV}$$

där  $\iiint_D dV = 2\pi R^3/3$  är volymen för ett halvklot. Samtidigt är

$$\begin{aligned} \iiint_D z dV &= \iiint_D z dx dy dz = \iiint_E r \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} R^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{1}{4} R^4 \pi \end{aligned}$$

så att

$$\hat{z} = \frac{\iiint_D z dV}{\iiint_D dV} = \frac{R^4 \pi / 4}{2\pi R^3 / 3} = \frac{3R}{8}.$$