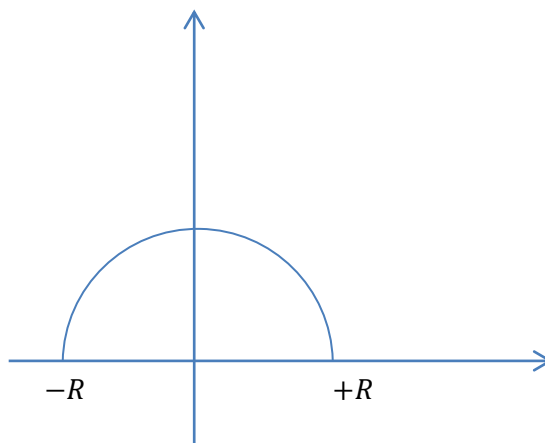


Uppgift B7.34

Vi skall bestämma tyngdpunkten \mathbf{r}_M hos en homogen (d.v.s. konstant densitet) halvcirkelformad tråd C . Låt radien på halvcirkeln vara R och lägg tråden i ett koordinatsystem enligt nedan.



Vi söker tyngdpunkten $\mathbf{r}_M = (x_M, y_M)$. Det är klart att $x_M = 0$, så i själva verket behöver vi bara finna y_M . Men y_M är medelvärdet av funktionen $y(x, y)$ över kurvan, så

$$y_M = \frac{\int_C y(x, y) ds}{\int_C ds}.$$

Det är klart att nämnaren är $\int_C ds = R\pi$, kurvans längd. För att beräkna täljaren behöver vi dock bågelementet:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \Rightarrow ds &= \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx = \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \end{aligned}$$

eftersom $R > 0$. Sålunda

$$\int_C y(x, y) ds = \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \int_{-R}^{+R} R dx = R \int_{-R}^{+R} dx = R \cdot 2R = 2R^2$$

och

$$y_M = \frac{\int_C y(x, y) ds}{\int_C ds} = \frac{2R^2}{R\pi} = \frac{2R}{\pi}.$$

Tyngdpunkten är alltså $\mathbf{r}_M = \left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$.