Uppgift B9.30c

Vi skall finna en partikulärlösning till den linjära differentialekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \sin x.$$

Vi börjar med att ansätta $y(x) = z(x)e^{3x}$ för någon (okänd) funktion z. Notera att

$$\begin{aligned} &y = ze^{3x} \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow y' = z'e^{3x} + 3ze^{3x} = (z' + 3z)e^{3x} \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow y'' = (z'' + 3z')e^{3x} + 3(z' + 3z)e^{3x} = (z'' + 6z' + 9z)e^{3x} \end{aligned}$$

så att den ursprungliga ekvationen lyder

$$(z'' + 6z' + 9z)e^{3x} - 3(z' + 3z)e^{3x} + 2ze^{3x} = 3^{3x} \sin x$$

eller

$$z'' + 3z' + 2z = \sin x.$$

Vi har alltså reducerat problemet till ett betydligt enklare problem i den nya obekanta funktionen z. Här ansätter vi

$$\begin{aligned} &z = A \sin x + B \cos x \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow z' = A \cos x - B \sin x \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow z'' = -A \sin x - B \cos x \end{aligned}$$

så att ekvationen lyder

$$\begin{aligned} &-A \sin x - B \cos x + 3A \cos x - 3B \sin x + 2A \sin x + 2B \cos x = \\ &\quad = (-3B + A) \sin x + (3A + B) \cos x = \sin x. \end{aligned}$$

Således $(-3B + A, 3A + B) = (1, 0)$ med lösningen $(A, B) = \left(\frac{1}{10}, -\frac{3}{10}\right)$. Vi har därmed funnit

$$z = \frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x$$

och följaktligen är

$$y = ze^{3x} = \left(\frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x\right) e^{3x}$$

en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen.