Uppgift N19b

Vi skall undersöka om serien

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-\sqrt{n}}$$

är absolutkonvergent, d.v.s. om

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n e^{-\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$$

är konvergent.

Metod 1

Notera att summanden $a_n = \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ är positiv och strängt avtagande på $\mathbb{R}^+$. Serien är därför konvergent om och endast om den motsvarande integralen

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}}$$

är konvergent. Men

$$\int_0^b \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}} = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2tdt = dx \end{bmatrix} = \int_0^{\sqrt{b}}\frac{2tdt}{e^t} = \int_0^{\sqrt{b}} 2te^{-t}dt = [-2te^{-t}]_0^{\sqrt{b}} - \int_0^{\sqrt{b}} -2e^{-t}dt =$$
$$= [-2te^{-t}]_0^{\sqrt{b}} - [2e^{-t}]_0^{\sqrt{b}} = -2\sqrt{b}e^{-\sqrt{b}} - 2e^{-\sqrt{b}} + 2 \to 2$$

så $\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}}$ är konvergent, och därmed är även serien $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ konvergent. Alltså är $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-\sqrt{n}}$ absolutkonvergent och därmed konvergent.

[Att den ursprungliga serien

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-\sqrt{n}}$$

är konvergent är emellertid uppenbart eftersom den är Leibniz.]

Metod 2

Vi vet att för alla $a > 0$ gäller

$$\frac{e^n}{n^a} \to \infty$$

då $n \to \infty$, d.v.s. exponentialfunktionen växer snabbare än potensfunktionen. Men detta medför förstås att

$$\frac{e^{n^{1/2}}}{(n^{1/2})^a} \to \infty$$

för alla $a > 0$. I synnerhet, för $a = 4$ har vi

$$\frac{e^{n^{1/2}}}{(n^{1/2})^4} = \frac{e^{n^{1/2}}}{n^2} \to \infty,$$

d.v.s. $e^{\sqrt{n}}$ växer snabbare än n^2. Det är då klart att det existerar ett $N \in \mathbb{Z}^+$ sådant att $e^{\sqrt{n}} > n^2$ för alla $n > N$. Låt N_0 vara ett sådant N. Då är

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} = \sum_{n=0}^{N_0} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} \leq \sum_{n=0}^{N_0} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Men det som står efter ”$\leq$” är uppenbarligen ett ändligt tal (varför?), så därför måste $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ också vara det.